ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΔΥΤΙΚΗΣ ΑΤΤΙΚΗΣ
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΣΧΕΔΙΑΣΗΣ ΚΑΙ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ

Εργαστήριο Υπολογιστικής Νοημοσύνης – Ευφυούς Ελέγχου

Αναστάσιος Ντούνης, Καθηγητής

Εισαγωγή στα Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα (ΤΝΔ)

Περίγραμμα Διαλέξεων

1. Ορισμοί - Γενικά στοιχεία στα ΤΝΔ
2. Ιστορική αναδρομή
3. Ανάδραση
4. Αναπαράσταση γνώσης
5. Συσχετιστική μνήμη
6. Μοντέλα νευρώνων
7. Τα ΤΝΔ ως κατευθυνόμενοι γράφοι
8. Αρχιτεκτονικές ΤΝΔ
9. Διανύσματα και πίνακες στα μοντέλα των ΤΝΔ
10. Υλοποίηση λογικών συναρτήσεων με ΤΝΔ
11. Αλγόριθμοι μάθησης στα ΤΝΔ
12. Ομαδοποίηση με ανταγωνιστική μάθηση (Δίκτυα Kohonen)
13. Κατηγοριοποίηση (Classification)

Προτεινόμενη Βιβλιογραφία

1. Σημειώσεις - Διαφάνειες διαλέξεων
2. Κ. Διαμαντάρας, Τεχνητά Νευρωνικά Δίκτυα, Κλειδάριθμος, 2007.
3. Γ. Μπούταλης, Γ. Συρακούλης, Υπολογιστική Νοημοσύνη και Εφαρμογές, 2010.
4. Σ. Τζαφέστας, Υπολογιστική Νοημοσύνη, Τόμος Α, Τόμος Β, 2002.
5. Simon Haykin, Νευρωνικά Δίκτυα και Μηχανική Μάθηση, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, 2010.

Μαθηματικό Γλωσσάρι

- Ένα διάνυσμα ορίζεται από μια στήλη βαθμωτών τιμών. Συνήθως το γράφουμε

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \text{ για να συμβολίσουμε το διάνυσμα } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

όπου T συμβολίζει την αντιστροφή του πίνακα.

- **Βαθμωτό** μέγεθος είναι το μονόμετρο μέγεθος.

- Το **εσωτερικό γινόμενο** ενός ζεύγους n-διάστατων διανυσμάτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ ορίζεται ως

$$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y}$$

- Εάν το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος τότε ισχύει: $\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T \cdot \boldsymbol{x}$

- Το **εξωτερικό γινόμενο** ενός ζεύγους n-διάστατων διανυσμάτων $\boldsymbol{x}$ και $\boldsymbol{y}$ ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}^T$$

και είναι ένας πίνακας (nx1)x(1xn) = nxn.

- **Ευκλείδεια απόσταση ή νόρμα** μεταξύ ενός ζεύγους διανυσμάτων $\mathbf{x}_1$ και $\mathbf{x}_2$ διαστάσεων nx1:

$$d(x_1, x_2) = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| = \left[\sum_{\iota=1}^{n} \left(x_{1\iota} - x_{2\iota}\right)^2\right]^{1/2}$$

Εάν $\|\mathbf{x}_1\| = \|\mathbf{x}_2\| = 1$ (κανονοικοποιημένα) τότε η ισχύει η επόμενη σχέση

$$d^2(x_1, x_2) = (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)^T \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 2 - 2\mathbf{x}_1^T \cdot \mathbf{x}_2 \quad (*)$$

Η ελαχιστοποίηση της ευκλείδειας απόστασης d αντιστοιχεί σε μεγιστοποίηση του εσωτερικού γινομένου.

Η Ευκλείδεια απόσταση (Matlab: dist) ορίζει την ομοιότητα μεταξύ των δύο διανυσμάτων. Όσο μικρότερη είναι η ευκλείδεια απόσταση τόσο μεγαλύτερη ομοιότητα έχουν τα διανύσματα.

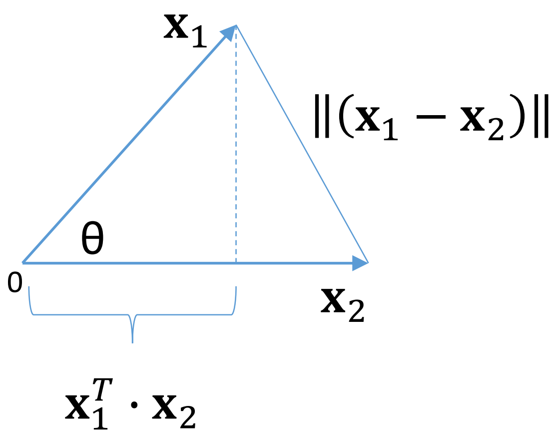
- Το συνημίτονο της γωνίας μεταξύ των δύο διανυσμάτων ορίζει την ομοιότητα των διανυσμάτων και συνδέεται με το εσωτερικό γινόμενο:

$$\sigma\upsilon\nu(\theta) = \frac{\mathbf{x}_1^T \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x_1}\| \cdot \|\mathbf{x_2}\|}$$

Όσο μεγαλύτερο είναι το συνημίτονο τόσο μικρότερη γωνία σχηματίζουν τα δύο διανύσματα επομένως τα διανύσματα έχουν μεγάλη ομοιότητα.

Αν η γωνία είναι ορθή, θ = π/2, τότε έχουμε $\langle \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \rangle = 0$. Στην περίπτωση αυτή τα διανύσματα καλούνται **ορθογώνια**.

Απόδειξη της σχέσης *
Εφαρμόζουμε πυθαγόρειο θεώρημα στα δύο ορθογώνια τρίγωνα



Άσκηση

Δίνονται τα διανύσματα: $\mathbf{x} = [1,2,3]^T$ και $\mathbf{y} = [5,6,7]^T$

Να υπολογισθούν:

α) το εσωτερικό γινόμενο

β) το εξωτερικό γινόμενο

γ) να επαληθευθεί η ιδιότητα $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$

δ) η απόσταση των δυο διανυσμάτων

ε) το συνημίτονο της γωνίας των δύο διαστημάτων

Απαντήσεις

$\alpha)\ x^T \cdot y = 5 + 12 + 21 = 38$

$$\beta)\ x \cdot y^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 7 \\ 10 & 12 & 14 \\ 15 & 18 & 21 \end{bmatrix}$$

γ) $38 = 38$

$\delta)\ d(x, y) = \|x - y\| = 4\sqrt{3}$

ε) συν(θ) = 0.9683

Τί είναι ΤΝΔ (1);

- ΤΝΔ – Τεχνητό Νευρωνικό Δίκτυο ή απλά Νευρωνικά Δίκτυα ή Συνδεσμικά μοντέλα ή παράλληλα μοντέλα κατανεμημένης επεξεργασίας ή νευρομορφικά συστήματα.
  - ✓Το ΤΝΔ προσομοιώνει τη συμπεριφορά του ανθρώπινου εγκεφάλου.
  - ✓Το ΤΝΔ είναι μια νέα γενιά συστημάτων επεξεργασίας της πληροφορίας

Τί είναι ΤΝΔ (2);

- Ορισμός (Aleksander & Morton, 1990): Ενα Τεχνητό Νευρωνικό Δίκτυο είναι τεράστιος παράλληλος επεξεργαστής με κατανεμημένη αρχιτεκτονική, ο οποίος αποτελείται από απλές μονάδες επεξεργασίας και έχει από τη φύση του τη δυνατότητα να αποθηκεύει εμπειρική γνώση και να την καθιστά διαθέσιμη για χρήση. Το ΤΝΔ ομοιάζει με τον ανθρώπινο εγκέφαλο για δύο λόγους:

  - Η γνώση αποκτιέται από το δίκτυο με τη διαδικασία της μάθησης (δοκιμή και σφάλμα).

  - Οι δυνάμεις σύνδεσης μεταξύ των νευρώνων γνωστές και ως συναπτικά βάρη χρησιμοποιούνται για την αποθήκευση της γνώσης.

Βασικά χαρακτηριστικά των ΤΝΔ

- Τα ΤΝΔ είναι μεταξύ των νεώτερων τεχνολογιών επεξεργασίας σήματος στην εργαλειοθήκη της μηχανικής μάθησης.
- Στην τεχνολογία τα ΤΝΔ βοηθούν σε σημαντικές λειτουργίες ως: ταξινομητές υποδειγμάτων, μη γραμμικά προσαρμοστικά φίλτρα, ελεγκτές συστημάτων, προσεγγιστές συναρτήσεων.
- Τα μοντέλα των ΤΝΔ αποτελούνται από πληθώρα μη γραμμικών υπολογιστικών στοιχείων τα οποία λειτουργούν παράλληλα. Το σύνολο των μη γραμμικών υπολογιστικών στοιχείων ή μονάδων επεξεργασίας ονομάζονται νευρώνες.
- Όταν ένα υπολογιστικό στοιχείο του ΤΝΔ αποτυγχάνει στη λειτουργία του τότε το ΤΝΔ μπορεί να συνεχίσει να δουλεύει χωρίς κανένα πρόβλημα εξαιτίας της παράλληλης φύσης του.
- Ένα ΤΝΔ χρειάζονται εκπαίδευση για να λειτουργήσει.
- Η Προσαρμοστικότητα ή μάθηση (adaptation ή learning) είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό των ΤΝΔ.

Η δομή των ΤΝΔ

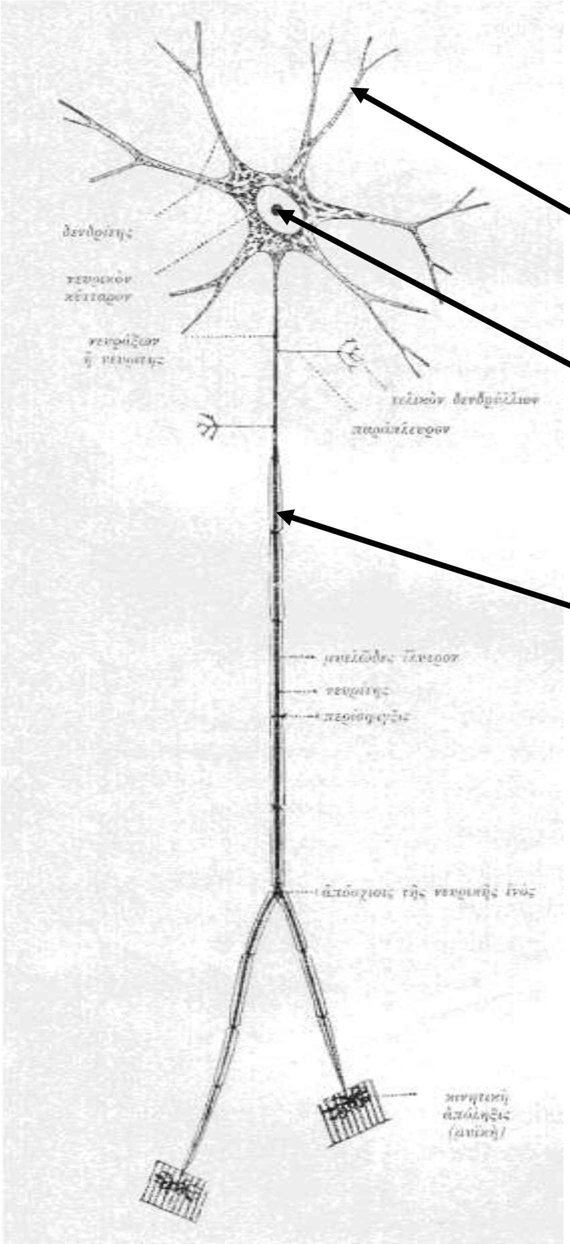
- Ένα ΤΝΔ αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό αλληλοσυνδεόμενων στοιχείων επεξεργασίας που ονομάζονται νευρώνες.

    ✓ Ο ανθρώπινος εγκέφαλος συνίσταται από ~10^{11} νευρώνες διαφορετικών τύπων.

- Πώς λειτουργούν τα ΤΝΔ;

    ✓ Με συλλογική (συγκεντρωτική) συμπεριφορά.

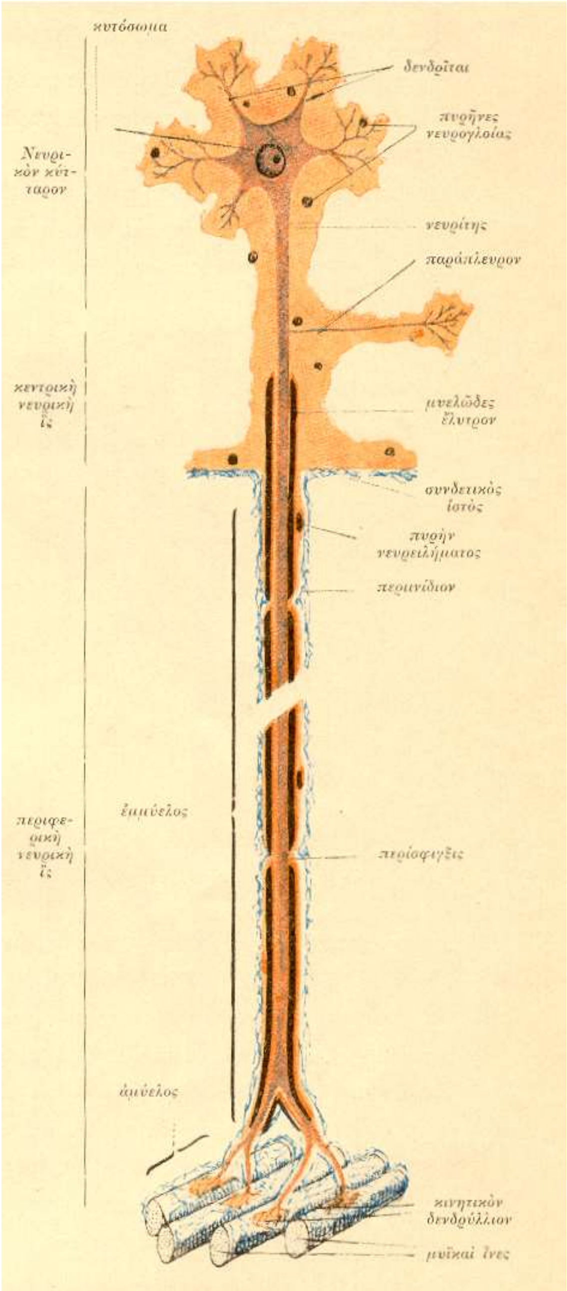
Ανατομία του νευρικού κυττάρου



Δενδρίτες

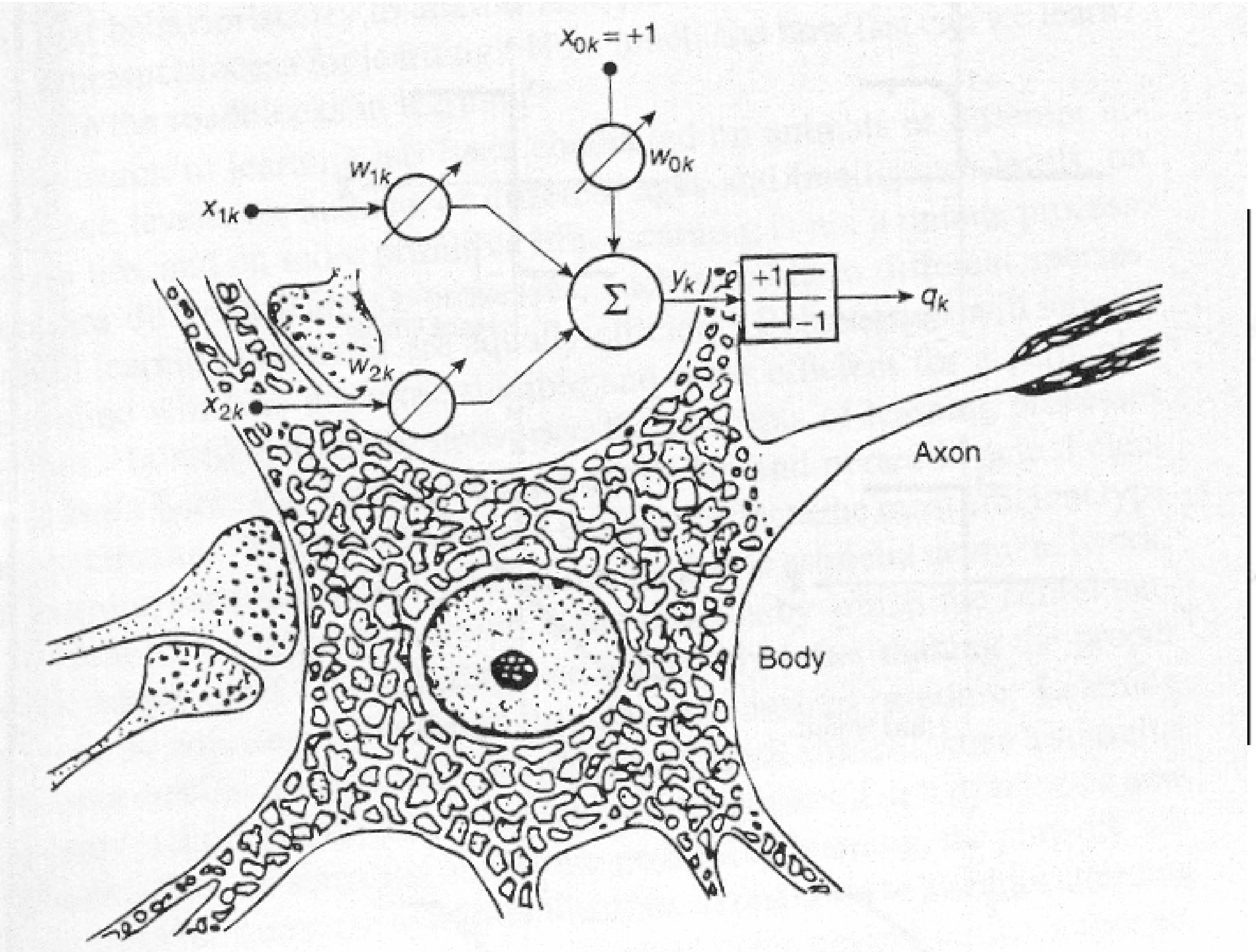
Σώμα

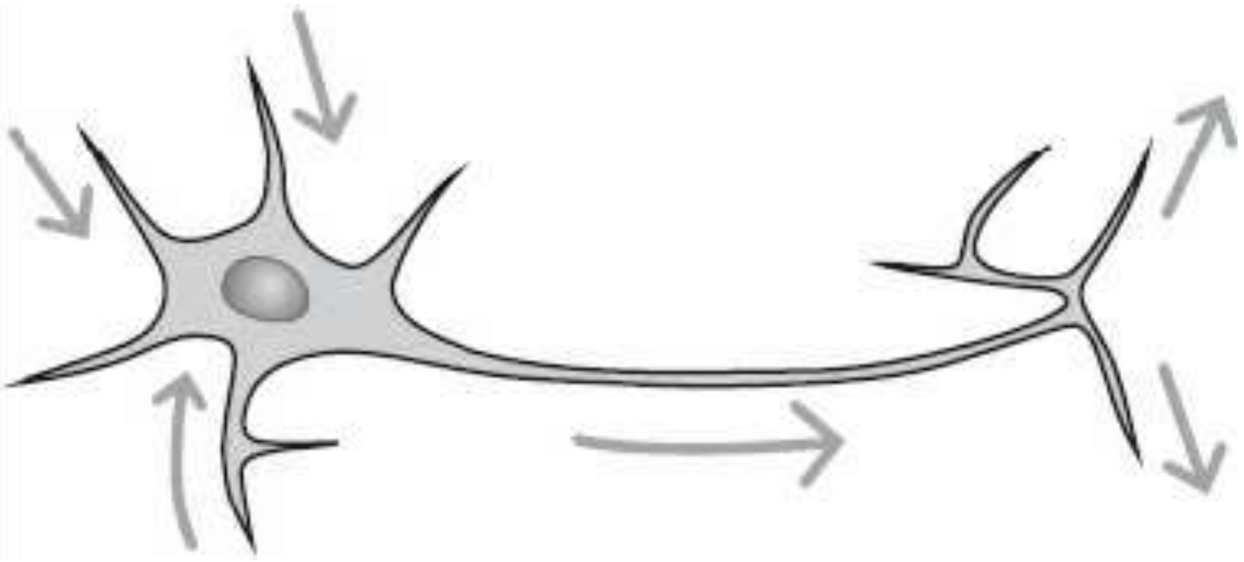
Αξονας



- **Σώμα**: Ο πυρήνας του νευρώνα.
- **Δενδρίτες** (παραλήπτες): Σημεία εισόδου ηλεκτρικών σημάτων. Οι δενδρίτες κάθε νευρώνα συνδέονται με τους άξονες άλλων νευρώνων.
- **Άξονας**: Έξοδος ηλεκτρικών σημάτων.
- Οι **συνάψεις** είναι σημεία ένωσης μεταξύ διακλαδώσεων του άξονα ενός νευρώνα και των δενδριτών από άλλους νευρώνες. Σε κάθε δενδρίτη υπάρχει ένα απειροελάχιστο κενό που ονομάζονται σύναψη. Το ποσοστό της ηλεκτρικής δραστηριότητας που μεταδίδεται στο δενδρίτη λέγεται **συναπτικό βάρος**. Η ικανότητα μάθησης και μνήμης που παρουσιάζει ο εγκέφαλος οφείλεται στην ικανότητα των συνάψεων να μεταβάλουν την αγωγιμότητά τους. Οι συνάψεις χωρίζονται σε **ενισχυτικές** (excitatory) και σε **ανασταλτικές** (inhibitory) ανάλογα με το αν το φορτίο που εκλύεται από τη σύναψη ερεθίζει το νευρώνα για να παράγει παλμούς με μεγαλύτερη συχνότητα ή αν τον καταστέλλει μειώνοντας την παραγωγή παλμών.
- **Η ταχύτητα μεταφοράς** των ηλεκτρικών παλμών είναι από 10 μέχρι 100 m/sec.
- Οι νευρώνες καταναλώνουν την περισσότερη ενέργεια από όλα τα κύτταρα του οργανισμού.
- Υπολογίζεται ότι ο ανθρώπινος εγκέφαλος καταναλώνει ισχύ 30 Watt.

Αναλογία με το Βιολογικό Νευρώνα





Source: S.V. Kartalopoulos, “Understanding Neural Networks & Fuzzy Logic”

• Βιολογικά νευρωνικά δίκτυα

Το ανθρώπινο νευρικό σύστημα μπορεί να προσεγγιστεί σαν ένα τριεπίπεδο σύστημα.

- Ο ανθρώπινος εγκέφαλος αποτελείται από περίπου 10-500 δισεκατομμύρια νευρώνες για την επεξεργασία των πληροφοριών.
- Ένας νευρώνας συνδέεται με άλλους νευρώνες, με κατά μέσο όρο περίπου 10.000 συνάψεις.

- Ο αριθμός αυτός προσεγγίζει τον αριθμό των γαλαξιών στο γνωστό μας σύμπαν.
- Ο εγκέφαλος παριστάνει ένα ασύγχρονο, μη γραμμικό, σε τεράστιο βαθμό παράλληλο, ανατροφοδοτούμενο δυναμικό σύστημα κοσμολογικών αναλογιών.

	Επεξεργαστικά στοιχεία	Μέγεθος στοιχείων	Ισχύς	Ταχύτητα επεξεργασίας	Τρόπος υπολογισμού	Ανθεκτικός σε λάθη
	10^{14} Νευρώνες	10^{-6} m	30W	100 Hz	Παράλληλος Κατανεμημένος	Ναι
	10^{8} Τρανζίστορς	10^{-6} m	30W	10^{9} Hz	Σειριακός Συγκεντρωτικός	Όχι

Ιστορική αναδρομή

1943: Το πρώτο μοντέλο νευρωνικού δικτύου (McCulloch & Pitts).

1949: Πρώτος αλγόριθμος μάθησης (Hebb & Pitts).

Κάθε φορά που ενεργοποιείται μια σύναψη, αυτή ενισχύεται, με αποτέλεσμα το δίκτυο να μαθαίνει "λίγο περισσότερο" το πρότυπο που του παρουσιάζεται εκείνη τη στιγμή.

1958: Το μοντέλο του απλού αισθητήρα – perceptron (Rosenblatt).

1969: Οι Minsky & Papert απέδειξαν μαθηματικά ότι τα ΤΝΔ ενός επιπέδου δεν μπορούν να λύσουν συγκεκριμένα προβλήματα.

1982: Μαθηματική απόδειξη ότι ένα νευρωνικό δίκτυο πολλών επιπέδων μπορεί να αποθηκεύσει οποιαδήποτε πληροφορία.

1986: Μέθοδος οπισθοδιάδοσης (Back-Propagation) για την εκπαίδευση ΤΝΔ (McClelland & Rumelhart).

1988: Σχεδιασμός κυψελωτών ΤΝΔ (Chua & Yang).

1988: Προτείνεται η μέθοδος εκπαίδευσης των ελαχίστων τετραγώνων (LMS) και το ADAptive LINear Element (ADALINE) (Windrow & Hoff).

Σήμερα: Η πρόοδος στους τομείς των ολοκληρωμένων κυκλωμάτων μεγάλης κλίμακας (VLSI) και στους παράλληλους υπολογιστές είχαν ως αποτέλεσμα την εντυπωσιακή ερευνητική άνθιση του ενδιαφέροντος στο χώρο των ΤΝΔ. Η εξέλιξη στη συνέχεια ήταν ραγδαία και σήμερα τα ΤΝΔ αποτελούν σημαντικό πεδίο βασικής και εφαρμοσμένης έρευνας.

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα των ΤΝΔ

Παρέχουν ένα πρακτικό τρόπο για την εκμάθηση αριθμητικών και διανυσματικών συναρτήσεων ορισμένων σε συνεχή ή διακριτά μεγέθη.

Πλεονεκτήματα

- ✓ Παρουσιάζουν ανοχή σε δεδομένα εκπαίδευσης με θόρυβο, δηλαδή δεδομένα που περιστασιακά έχουν λανθασμένες τιμές (π.χ. λάθη καταχώρησης).
- ✓ Παράλληλη επεξεργασία
- ✓ Προσαρμοστικότητα
- ✓ Δεν υπάρχει ανάγκη χαρακτηρισμού του προβλήματος πέρα από το σύνολο προτύπων εκπαίδευσης.

Μειονεκτήματα

- ✓ Αδυνατούν να εξηγήσουν ποιοτικά τη γνώση που μοντελοποιούν.
- ✓ Δεν υπάρχουν σαφείς κανόνες για την ανάπτυξή τους.
- ✓ Η εκπαίδευση μπορεί να είναι δύσκολη ή αδύνατη.
- ✓ Η ικανότητα γενίκευσης είναι δύσκολα προβλέψιμη.

Εφαρμογές ΤΝΔ

Συστήματα αναγνώρισης ταυτότητας

Ταξινόμησης προτύπων

Επεξεργασία εικόνας

Επεξεργασία ομιλίας

Μηχανική όραση

Ρομποτική

Βιοϊατρική

Οικονομία

Συστήματα ελέγχου

κτλ.

Τυπικές εφαρμογές ΤΝΔ

- Ταξινόμηση

  Ιατρική διάγνωση, αναγνώριση στόχου, χαρακτήρων και φωνής.

- Προσέγγιση συνάρτησης

  Μοντελοποίηση διαδικασίας, έλεγχος διαδικασίας, μοντελοποίηση δεδομένων, διαγνωστική βλαβών δυναμικών συστημάτων, αναγνώριση συστημάτων.

- Πρόβλεψη χρονοσειρών

  Πρόβλεψη οικονομικών μεγεθών (πτώχευση, πωλήσεις), δυναμική μοντελοποίηση συστημάτων.

- Εξόρυξη δεδομένων

  Ομαδοποίηση, οπτικοποίηση δεδομένων (στατιστικά γραφήματα, θεματικοί χάρτες), εκμαίευση δεδομένων.

Ποιά είναι τα βασικά δομικά στοιχεία των ΤΝΔ;

- Ένα μαθηματικό μοντέλο εμπνευσμένο από τη νευροφυσιολογία.
- Αποτελείται από ένα μεγάλο σύνολο νευρώνων, δηλαδή στοιχείων αριθμητικής επεξεργασίας πληροφορίας.
- Η αντίδραση του νευρώνα εξαρτάται μόνο από τοπική πληροφορία.
- Ικανότητα μάθησης, ανάκλησης και γενίκευσης.
- Οι συνδέσεις με τα ρυθμιζόμενα βάρη αποθηκεύουν γνώση.
- Η συλλογική συμπεριφορά επιδεικνύει την υπολογιστική ισχύ.

- Ο νευρώνας αποτελείται από τρία βασικά στοιχεία:
  1. Συνάψεις (εκφράζονται από τα συναπτικά βάρη)
  2. Αθροιστής (γραμμικός συνδυασμός των εισόδων του αθροιστή)
  3. Συνάρτηση ενεργοποίησης (ελέγχει το πλάτος της εξόδου του νευρώνα)

Ανάδραση (feedback) στα ΤΝΔ

Η ανάδραση λαμβάνει χώρα σε όλα τα μέρη του νευρικού συστήματος κάθε ζώντος οργανισμού. Με την ανάδραση στα ΤΝΔ επιτυγχάνουμε:

- Η έξοδος ενός στοιχείου ενός συστήματος ανατροφοδοτείται και επηρεάζει την είσοδο που εφαρμόζεται στο στοιχείο αυτό.
- Δημιουργία κλειστών βρόγχων.
- Η ανάδραση εμφανίζεται στο νευρικό σύστημα κάθε ζώντος οργανισμού.
- Το θέμα της ευστάθειας σε συστήματα με ανάδραση είναι εξαιρετικά σημαντικό.

Αναπαράσταση της γνώσης στα ΤΝΔ;

- Στον ορισμό των ΤΝΔ χρησιμοποιήθηκε η λέξη «γνώση».

Τι είναι όμως γνώση;

Η γνώση είναι η αποθηκευμένη πληροφορία ή τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται από έναν άνθρωπο ή μια μηχανή για να ερμηνεύσουν, να προβλέψουν και να αντιδράσουν κατάλληλα στον εξωτερικό κόσμο.

- Ποιά είναι τα κύρια χαρακτηριστικά της αναπαράστασης γνώσης

–Τι είδους πληροφορία παρέχεται
–Πώς κωδικοποιείται η πληροφορία για περαιτέρω χρήση.

- Ένα ΤΝΔ πρέπει να κατασκευάσει ένα μοντέλο του περιβάλλοντος στο οποίο λειτουργεί και να φροντίσει για τη διατήρηση της συνέπειας του μοντέλου με το περιβάλλον.

- Η γνώση του περιβάλλοντος αποτελείται από δύο είδη πληροφορίας:

  –Προϋπάρχουσα πληροφορία για την κατάσταση του περιβάλλοντος

  –Παρατηρήσεις (μετρήσεις) προερχόμενες από το περιβάλλον, συνήθως θορυβώδεις, παρέχουν πληροφορίες για το περιβάλλον και χρησιμοποιούνται ως παραδείγματα για την εκπαίδευση του δικτύου.

- Τα παραδείγματα μπορεί να είναι:

–Δεδομένα (δείγμα) εκπαίδευσης (training data/sample) δηλαδή η είσοδος συνοδεύεται από την επιθυμητή απόκριση του δικτύου.

- Φάση εκπαίδευσης (learning),

  Φάση ανάκλησης (recall, generalization).

- Σε ένα ΤΝΔ συγκεκριμένης αρχιτεκτονικής η γνώση του περιβάλλοντος κωδικοποιείται στις παραμέτρους του δικτύου (συναπτικά βάρη και σταθερές πόλωσης).

Συσχετιστικές μνήμες

- Στους κλασικούς υπολογιστές γνωρίζουμε ότι η μνήμη RAM δε λειτουργεί με συσχετιστικό τρόπο. Η πληροφορία αποθηκεύεται σε μια περιοχή της μνήμης και η προσπέλαση γίνεται χρησιμοποιώντας τη διεύθυνσή της μέσω του αποκωδικοποιητή διευθύνσεων.
- Σε προβλήματα που σχετίζονται ευφυή συστήματα (αναγνώριση προτύπων) η παραπάνω λογική δεν είναι η πλέον κατάλληλη. Σε τέτοια προβλήματα το περιεχόμενο των δεδομένων είναι πολύ σημαντικό και η διεύθυνσή του.
- Επομένως μας βοηθάει μια άλλου είδους μνήμη η **συσχετιστική μνήμη**.

$$\text{είσοδος} = \text{δεδομένα} \rightarrow \text{έξοδος} = \text{δεδομένα}$$

όπου τα δεδομένα της εξόδου είναι τα πιο κοντινά με τα δεδομένα της εισόδου.

- Η ανθρώπινη μνήμη είναι μια συσχετιστική μνήμη. Η μνήμη αυτή σχηματίζει συσχετίσεις/αντιστοιχίες ανάμεσα σε γεγονότα, μουσικά κομμάτια, πρόσωπα κ.α.
- Οι συσχετιστικές μνήμες επιδεικνύουν ανοχή σε σφάλματα ή παραμορφώσεις του προτύπου εισόδου, αρκεί οι παραμορφώσεις να μην είναι πολύ μεγάλες.

Λειτουργία συσχετιστικής μνήμης

- Η λειτουργία μια συσχετιστικής μνήμης περιλαμβάνει δυο φάσεις:

  α. τη φάση της αποθήκευσης (μάθησης)

  β. τη φάση της ανάκλησης

  Κατά τη φάση της μάθησης η παρουσίαση του ερεθίσματος στην είσοδο (πρότυπο) μετασχηματίζεται σε ένα αποθηκευμένο πρότυπο.

  Κατά τη φάση της ανάκλησης η μνήμη δέχεται μια παραμορφωμένη παραλλαγή του αποθηκευμένου προτύπου και δίνει ως έξοδο το σωστό πρότυπο. Η ανάκληση της πληροφορίας δε γίνεται με βάση τη διεύθυνση αλλά με βάση το περιεχόμενο.

- Η συσχετιστική μνήμη είναι μια κατανεμημένη μνήμη.

Τα διανύσματα εισόδου έχουν διάσταση n. Για μια δεδομένη διάσταση n η συσχετιστική μνήμη μπορεί να συσχετίσει ένα αριθμό m προτύπων (m<=n)

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{y}_k \quad k = 1,2,\ldots,m$$

- Συνεπώς στις συσχετιστικές μνήμες δεν υπάρχει άμεση αντιστοίχιση ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδο. Η έξοδος δεν καθορίζεται από μια απλή θέση μνήμης αλλά συμμετέχει όλος ο πίνακας θέσεων της μνήμης.

Πίνακας μνήμης συσχέτισης

Υπολογισμός του πίνακα μνήμης M: $$M = \sum_{k=1}^{m} y_k \cdot x_k^T$$

$$y_k(n_1 x 1), x_k(1 x n_2), M(n_1 x n_2)$$

Πως μπορούμε να ανακτήσουμε ένα δεδομένο πρότυπο διάνυσμα εισόδου, αν γνωρίζουμε τον πίνακα μνήμης M;

Απόκριση μνήμης: $$y_k = M \cdot x_k$$

- Συνεπώς στις συσχετιστικές μνήμες δεν υπάρχει άμεση αντιστοίχιση ανάμεσα στην είσοδο και στην έξοδο. Η έξοδος δεν καθορίζεται από μια απλή θέση μνήμης αλλά συμμετέχει όλος ο πίνακας θέσεων της μνήμης.

Άσκηση

Δίνονται τα παρακάτω ορθογώνια διανύσματα (ποια διανύσματα ονομάζονται ορθογώνια;)

$$\mathbf{x}_1 = [1,0,0,0]^T, \mathbf{x}_2 = [0,1,0,0]^T, \mathbf{x}_3 = [0,0,1,0]^T$$

Τα αντίστοιχα αποθηκευμένα πρότυπα είναι:

$$\mathbf{y}_1 = [5,1,0]^T, \mathbf{y}_2 = [-2,1,6]^T, \mathbf{y}_3 = [-2,4,3]^T$$

Να βρεθούν:

α) Ο πίνακας M της μνήμης

β) Να αποδειχθεί ότι μνήμη συσχετίζει απόλυτα

γ) Θεωρούμε ότι η διέγερση εισόδου της παραπάνω μνήμης είναι η παραμορφωμένη από θόρυβο παραλλαγή του προτύπου εκπαίδευσης $\mathbf{x}_1$.

$$\tilde{x}_1 = [0.8, -0.15, 0.15, -0.2]^T$$

γ1) Να υπολογισθεί η απόκριση **y** της μνήμης.

γ2) Να δεχθεί ότι η απόκριση **y** είναι περισσότερο όμοια προς το πρότυπο $\mathbf{x}_1$ με την Ευκλείδεια απόσταση.

Problem 2.18

(a) The input dimensionality is $L = 4$, and the output dimensionality is $M = 3$. The memory matrix is

$$\underset{\sim}{M} = \sum_{k} \underset{\sim}{b}_k \underset{\sim}{a}_k^T$$

For the problem at hand,

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{a}_1 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{a}_2 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{a}_3 = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Thus, the memorized patterns $\underset{\sim}{b}_1$, $\underset{\sim}{b}_2$, and $\underset{\sim}{b}_3$ are recalled exactly.

Problem 2.19

(a) The response vector is

$$\hat{\underset{\sim}{b}} = \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{a}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.80 \\ -0.15 \\ 0.15 \\ -0.20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 + 0.3 - 0.3 + 0 \\ 0.8 - 0.15 + 0.6 + 0 \\ 0 - 0.9 + 0.45 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 1.25 \\ -0.45 \end{bmatrix}$$

(b)

$$\| \hat{\underset{\sim}{b}} - \underset{\sim}{b}_1 \|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 1.25 \\ -0.45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} -1 \\ 0.25 \\ -0.45 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= (-1)^2 + (0.25)^2 + (-0.45)^2$$

$$= 1 + 0.0625 + 0.2025$$

$$= 1.265$$

$$\|\hat{\underset{\sim}{b}} - \underset{\sim}{b}_2\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 1.25 \\ -0.45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 6 \\ 0.25 \\ -6.45 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= (6)^2 + (0.25)^2 + (-6.45)^2$$

$$= 36 + 0.0625 + 41.603$$

$$= 77.666$$

$$\|\hat{\underset{\sim}{b}} - \underset{\sim}{b}_3\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} 4 \\ 1.25 \\ -0.45 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= \left\| \begin{bmatrix} 6 \\ -2.75 \\ -3.45 \end{bmatrix} \right\|^2$$

$$= (6)^2 + (-2.75)^2 + (3.45)^2$$

$$= 36 + 7.5625 + 11.903$$

$$= 55.466$$

These results show that the response vector $\hat{\underset{\sim}{b}}$ is closest to the memorized vector $\underset{\sim}{b}_1$ in a Euclidean sense than any of the others. A decision is therefore made in favor of $\underset{\sim}{b}_1$.

Άσκηση συσχετιζόμενης μνήμης

Δίνονται τα παρακάτω διανύσματα

$$x_1 = [1,0,0,0]^T, x_2 = [0,1,0,0]^T, x_3 = [0,0,1,0]^T, x_4 = [0,0,0,1]^T$$

Τα αντίστοιχα αποθηκευμένα πρότυπα είναι:

$$\mathbf{y}_1 = [1,0]^T, \mathbf{y}_2 = [1,0]^T, \mathbf{y}_3 = [0,1]^T, \mathbf{y}_4 = [0,1]^T$$

Να βρεθούν:

α) Ο πίνακας M της μνήμης

β) Να αποδειχθεί ότι μνήμη συσχετίζει απόλυτα

γ) Θεωρούμε ότι η διέγερση εισόδου της παραπάνω μνήμης είναι η παραμορφωμένη από θόρυβο παραλλαγής του προτύπου εκπαίδευσης $\mathbf{x}_2$

$$\tilde{x}_2 = [0.8,0.9,0.15,-0.1]^T$$

γ1) Να υπολογισθεί η απόκριση $\mathbf{y}$ της μνήμης.

γ2) Με ποιο πρότυπο ταιριάζει περισσότερο η απόκριση $\mathbf{y}$;

Η διάσταση της εισόδου είναι n2 = 4 και της εξόδου n1 = 2. Οι διαστάσεις του πίνακα είναι 2x4 = (2x1)x(2x4)

α)

$$M = \begin{bmatrix} 1 \; 1 \; 0 \; 0 \\ 0 \; 0 \; 1 \; 1 \end{bmatrix}$$

β)

$$y_1 = x_1, y_2 = x_2, y_3 = x_3, y_4 = x_4$$

γ1) για k = 2

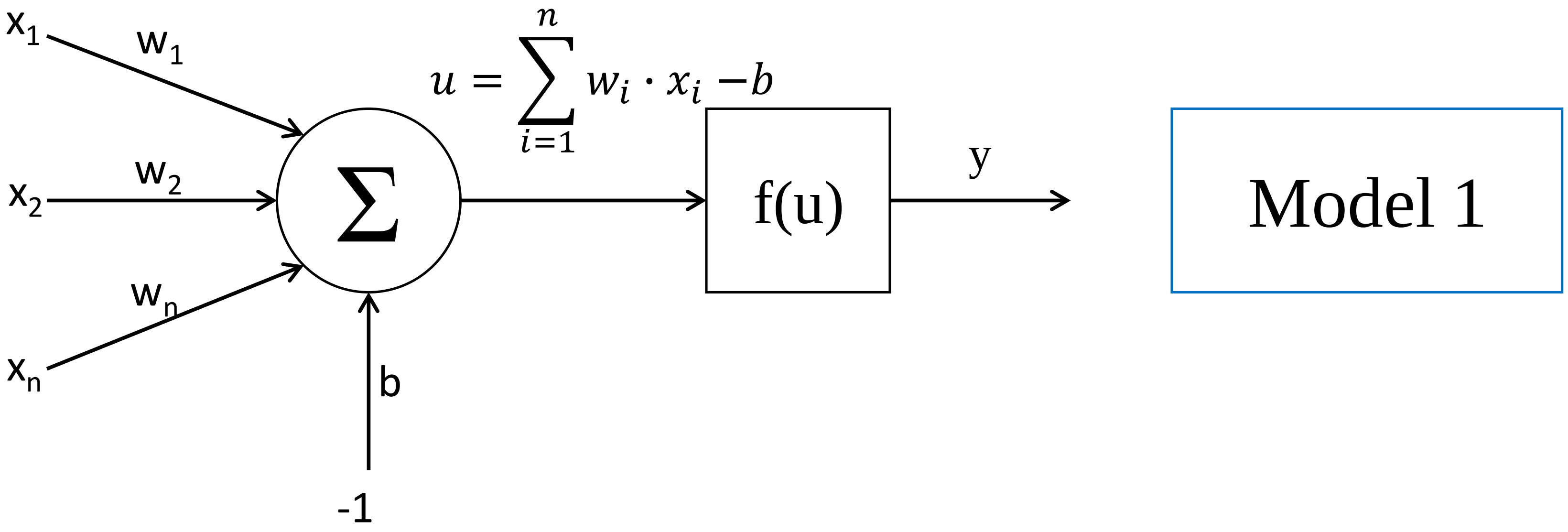
$$\tilde{y}_k = M \cdot \tilde{x}_k$$

γ2) για k = 2

$$d = \|\tilde{y}_k - y_k\|$$

Μοντέλα Νευρώνων

Μοντέλο McCulloch Pits (MCP Neuron)



Βηματική Συνάρτηση 0/1 (Step function)

$$f(u) = \begin{cases} 0 \ \alpha\nu \ u \leq 0 \\ 1 \ \alpha\nu \ u > 0 \end{cases}$$

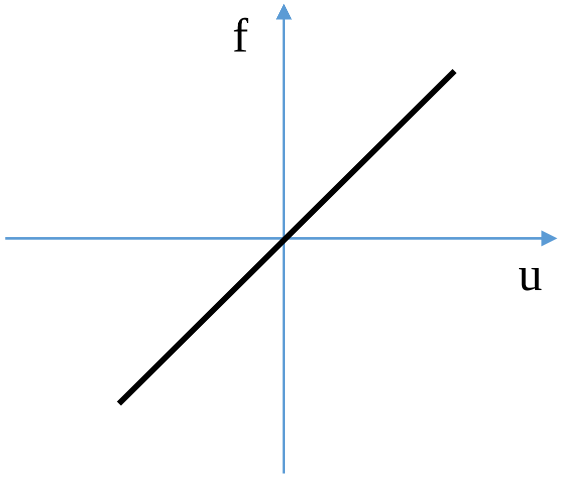
y = 0 ⟶ ο νευρώνας είναι αδρανής

y = 1 ⟶ ο νευρώνας είναι ενεργός

Παραδείγματα συναρτήσεων ενεργοποίησης του νευρώνα

Γραμμική (linear)

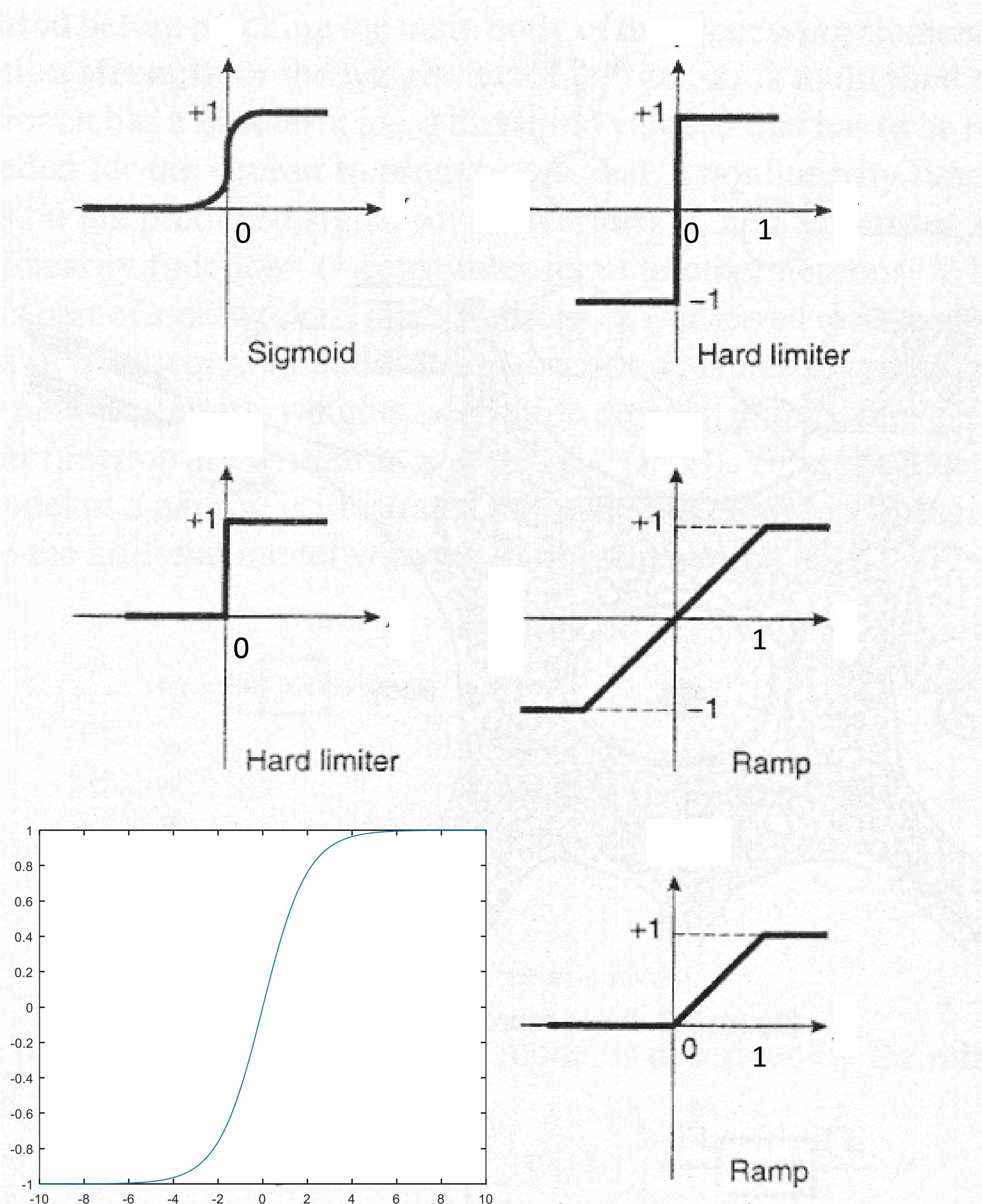
$$f(u) = u$$



Συναρτήσεις με κατώφλι ενεργοποίησης b = 0

$f(u) = \frac{1}{1+e^{-u}}$ (σιγμοειδής)

f(u) = βηματική -1/1 (step function -1/1)
Συνάρτηση προσήμου



f(u)= $\begin{cases} 0 \ \alpha\nu \ u \leq 0 \\ 1 \ \alpha\nu \ u > 0 \end{cases}$

Βηματική 0/1 (step function)

f(u)= $\begin{cases} -1 \ \alpha\nu \ u \leq -1 \\ x \ \alpha\nu \ -1 < u < 1 \\ 1 \ \alpha\nu \ u \geq 1 \end{cases}$

Συνάρτηση κατωφλίου - Piecewise Linear Function

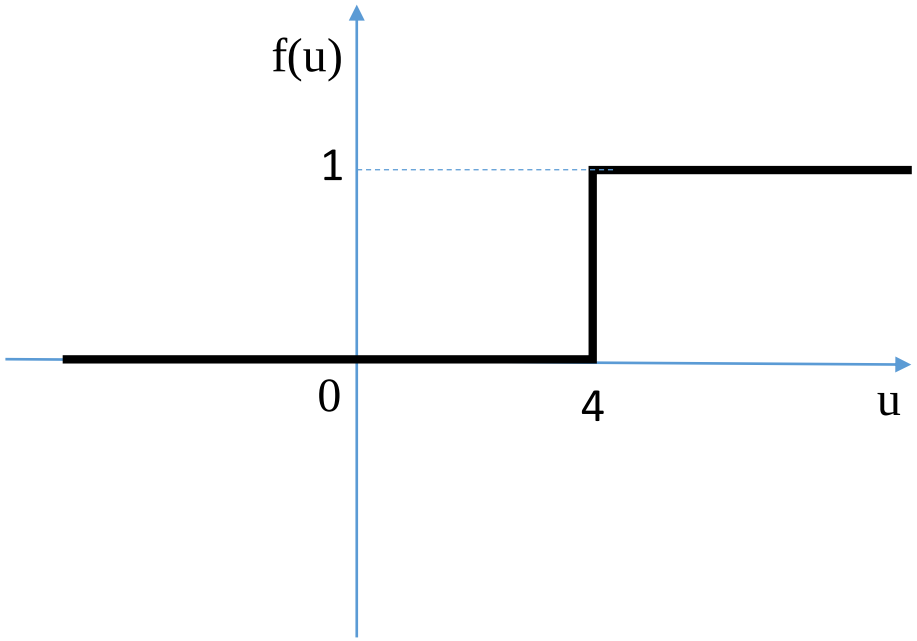
f(u)= $\tanh(u) = \frac{1-e^{-u}}{1+e^{-u}}$

f(u)= $\begin{cases} 0 \ \alpha\nu \ u \leq 0 \\ u \ \alpha\nu \ 0 < u < 1 \\ 1 \ \alpha\nu \ u \geq 1 \end{cases}$

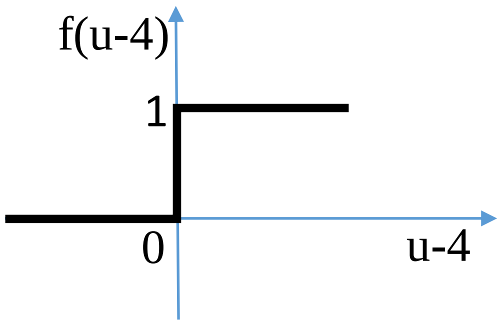
Συνάρτηση κατωφλίου

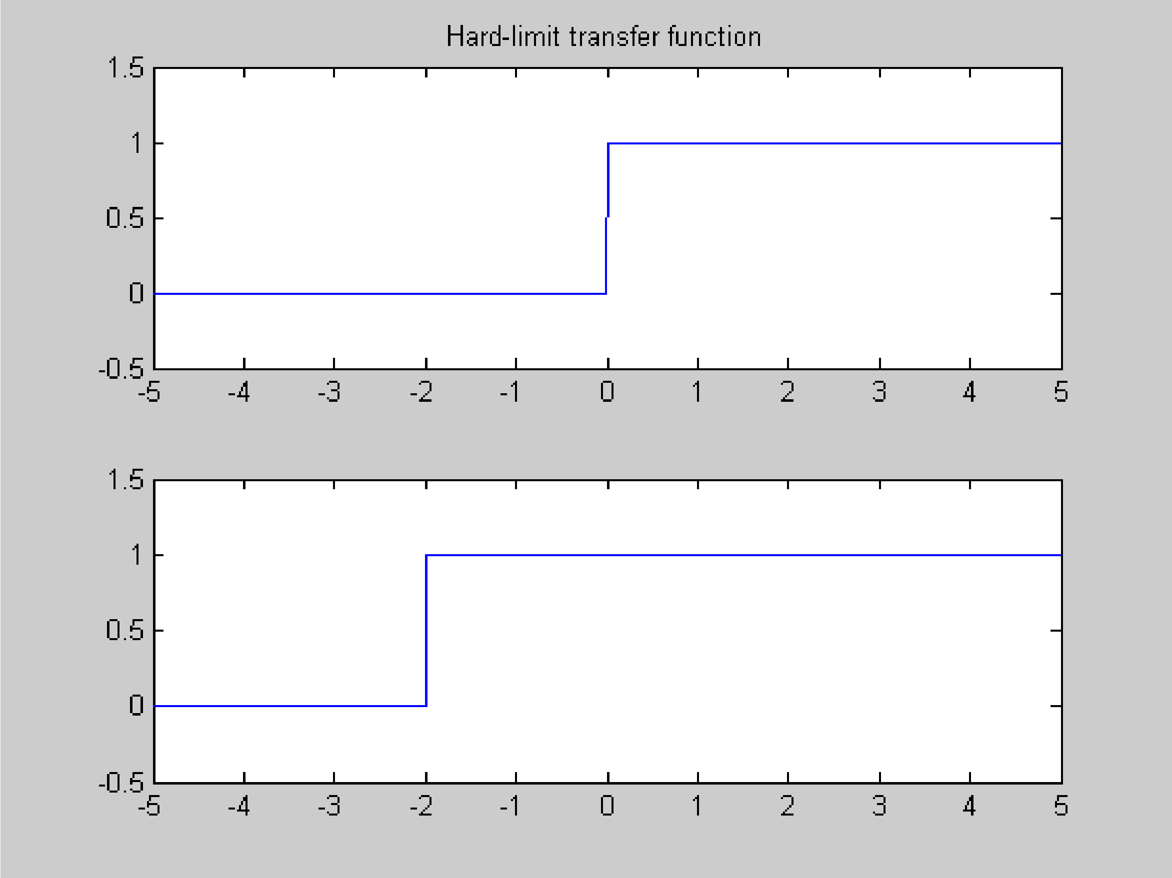
Να σχεδιαστεί η βηματική συνάρτηση ενεργοποίησης -1/1 με κατώφλι ενεργοποίησης b = 4.

$$f(u)=\begin{cases}0 \; αν \; u \leq 4 \\ 1 \; αν \; u > 4\end{cases}$$

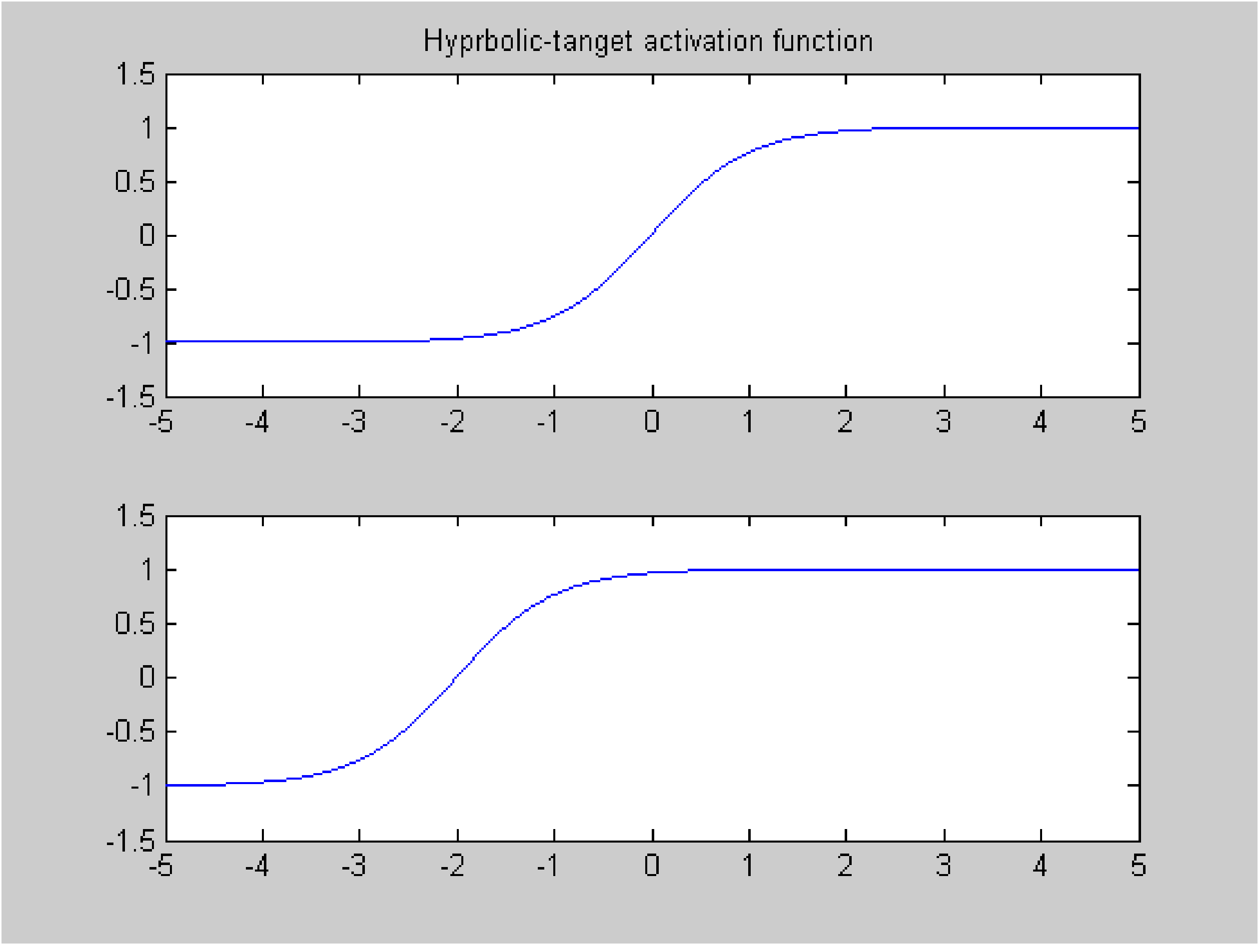


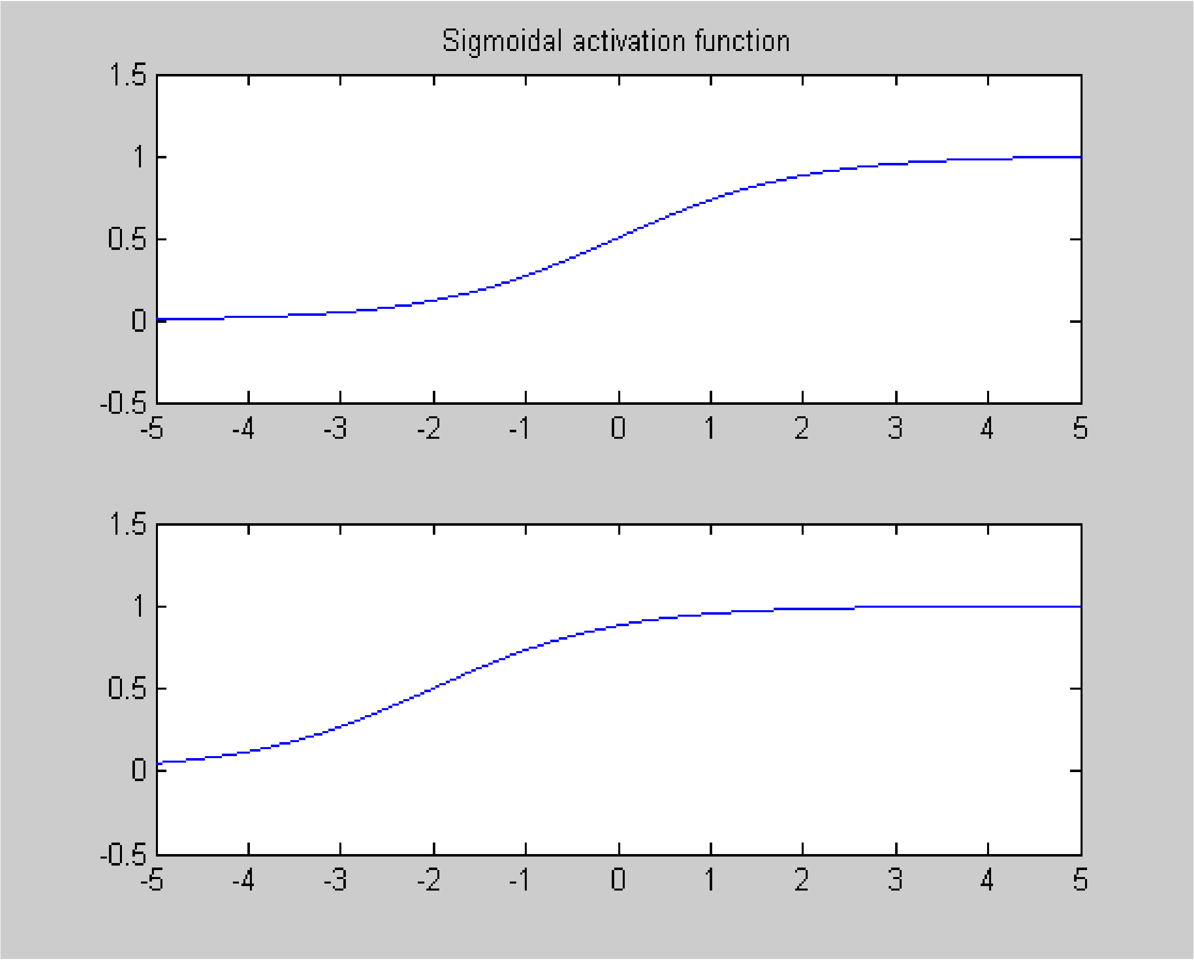
$$f(u\text{-}4)=\begin{cases}0 \; αν \; u-4 \leq 0 \\ 1 \; αν \; u-4 > 0\end{cases}$$





Hard-limit transfer function
1.5
1
0.5
0
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


Hyprbolic-tanget activation function
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5


Sigmoidal activation function
1.5
1
0.5
0
-0.5
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Παραγώγιση συναρτήσεων ενεργοποίησης

- $f(u) = \frac{1}{1+e^{-u}}$

$f'(u) = \frac{-1(-e^{-u})}{(1+e^{-u})^2} = \frac{1}{1+e^{-u}} \frac{e^{-u}}{1+e^{-u}}$

$f'(u)$=$f(u)$(1-$f(u)$)

- $f(u) = u \rightarrow \; f'(u) = 1$

- $f(u) = \frac{e^{u}-e^{-u}}{e^{u}+e^{-u}}$

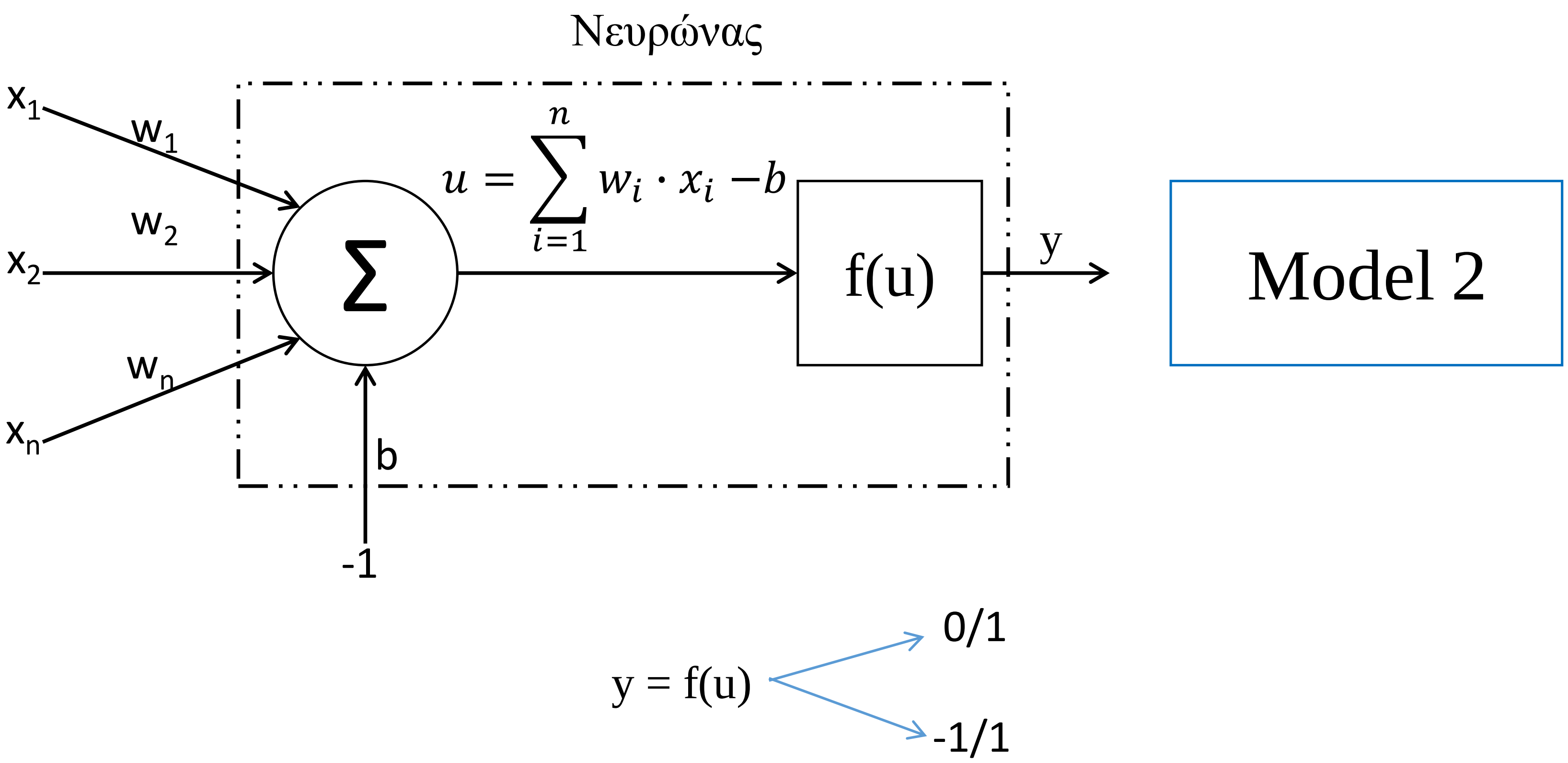
$f'(u) = \frac{(e^{u}+e^{-u})(e^{u}+e^{-u})-e^{u}-e^{-u})(e^{u}-e^{-u})}{(e^{u}+e^{-u})^2} =$

$$= \frac{(e^{u} + e^{-u})^2 - (e^{u} - e^{-u})^2}{(e^{u} + e^{-u})^2} = 1 - f(u)^2$$

$$= \big(1 - f(u)\big)(1 + f(u))$$

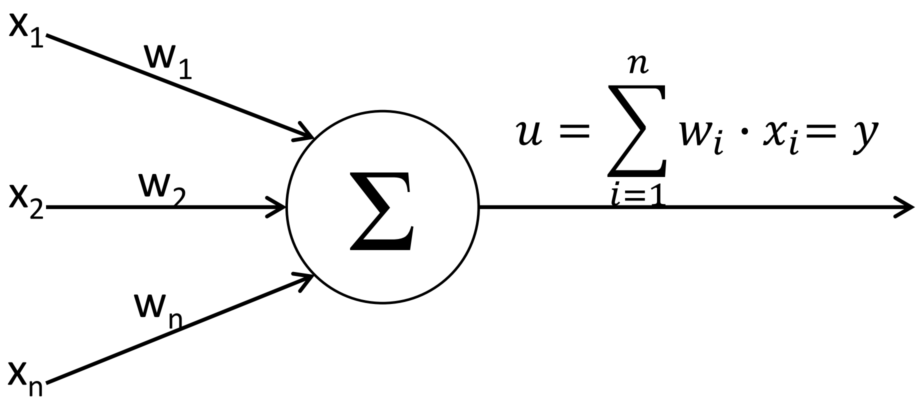
- Η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης 0/1 ή -1/1 είναι 1.

Μοντέλο Perceptron



Νευρώνας Perceptron με γραμμική συνάρτηση μεταφοράς

ADALINE: ADAptive LINear Element



Model 3

Το στοιχείο αυτό προτάθηκε από τους Widrow και Hoff.
Πρώτη εφαρμογή εκπαιδευόμενων μονάδων για τον έλεγχο ενός ανάστροφου εκκρεμούς στις αρχές τις δεκαετίας του 60.
Η διαφορά με τους προηγούμενους νευρώνες είναι ότι η έξοδος y παίρνει συνεχείς τιμές από -∞ έως +∞.

Στατικός Νευρώνας (Μαθηματική έκφραση)

- **1η Μορφή**
- $u = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i - b$
- $y = f(u)$

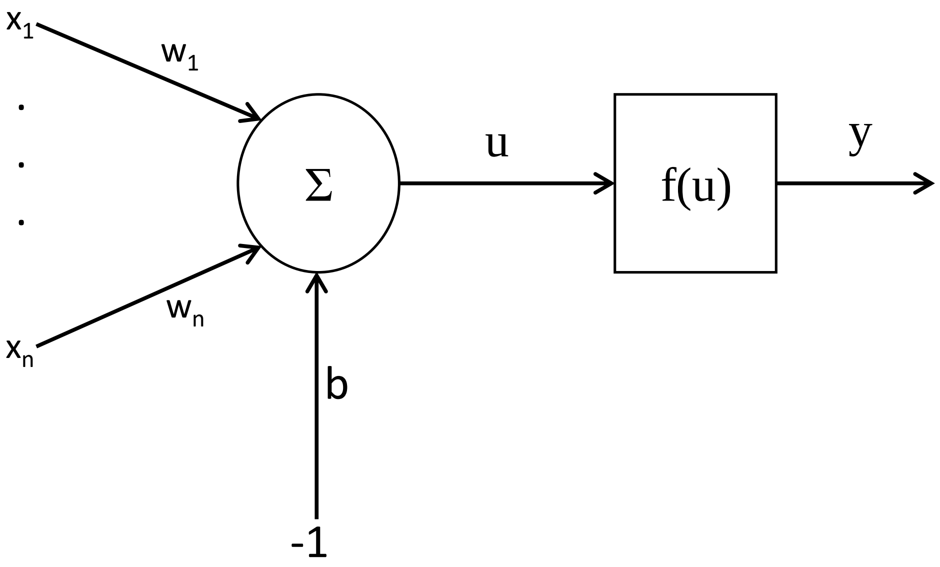
$y = f(\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i - b),\ \ x = [x_1, x_2, \dots x_n]^T$

$w = [w_1, w_2, \dots w_n]^T$

Αν $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i > b \to u > 0$

Αν $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i = b \to u = 0$

Αν $\sum_{i=1}^{n} w_i \cdot x_i < b \to u < 0$



Το b είναι το κατώφλι πάνω από το οποίο ενεργοποιείται ο νευρώνας.

- **2η Μορφή**

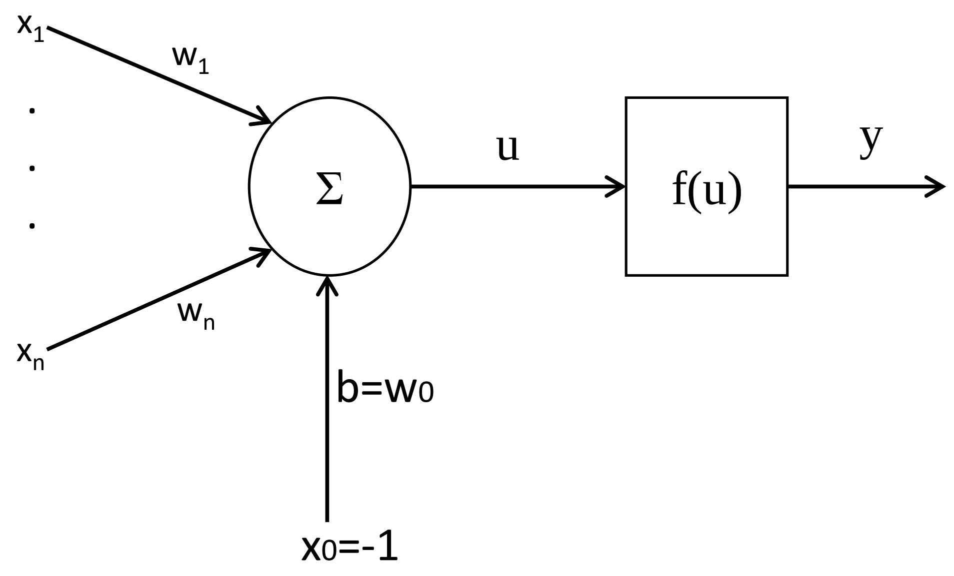
Θεωρούμε το κατώφλι b σαν ένα ακόμα συναπτικό βάρος w_0. Τότε έχουμε

$y = f(\sum_{i=0}^{n} w_i \cdot x_i)$, όπου

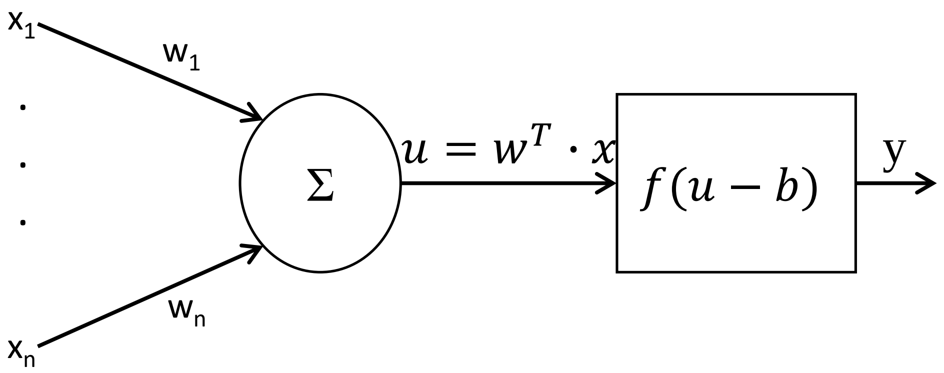
$x = [x_0, x_1, x_2, \dots x_n]^T$, $w = [w_0, w_1, w_2, \dots w_n]^T$ είναι τα επαυξημένα διανύσματα βαρών και εισόδων.

Η εξίσωση $u = \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot x_i$ γράφεται και ως το εσωτερικό γινόμενο μεταξύ των διανυσμάτων w και x:

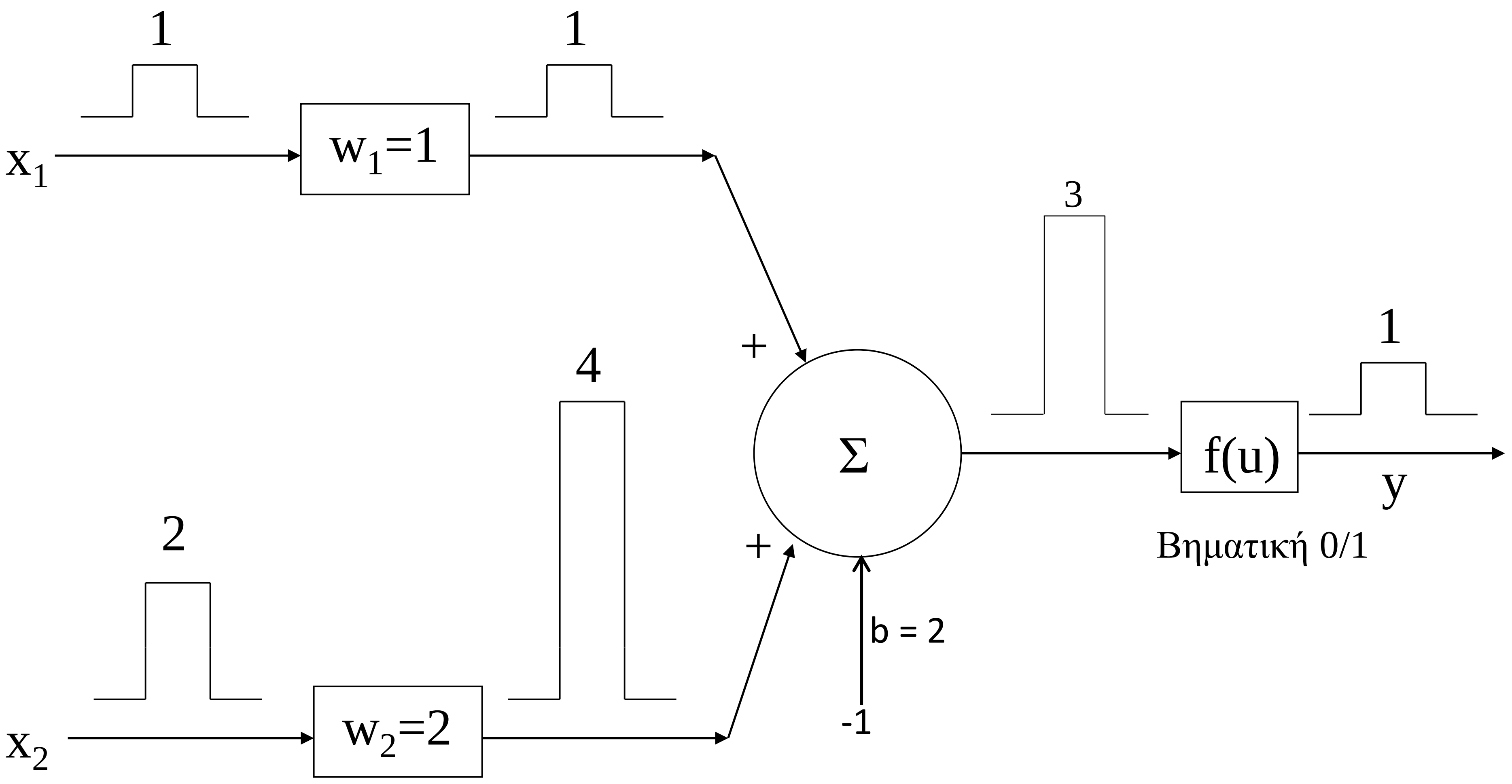
$u = w^T \cdot x$



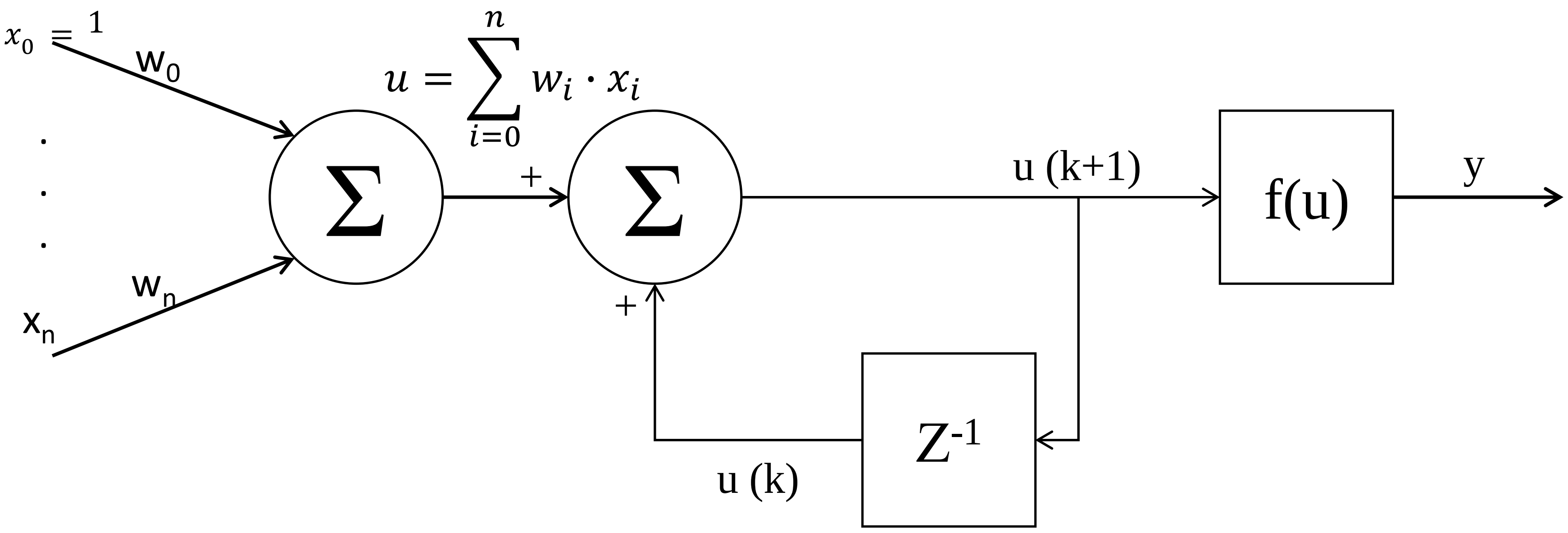
- **3η Μορφή**



Παράδειγμα



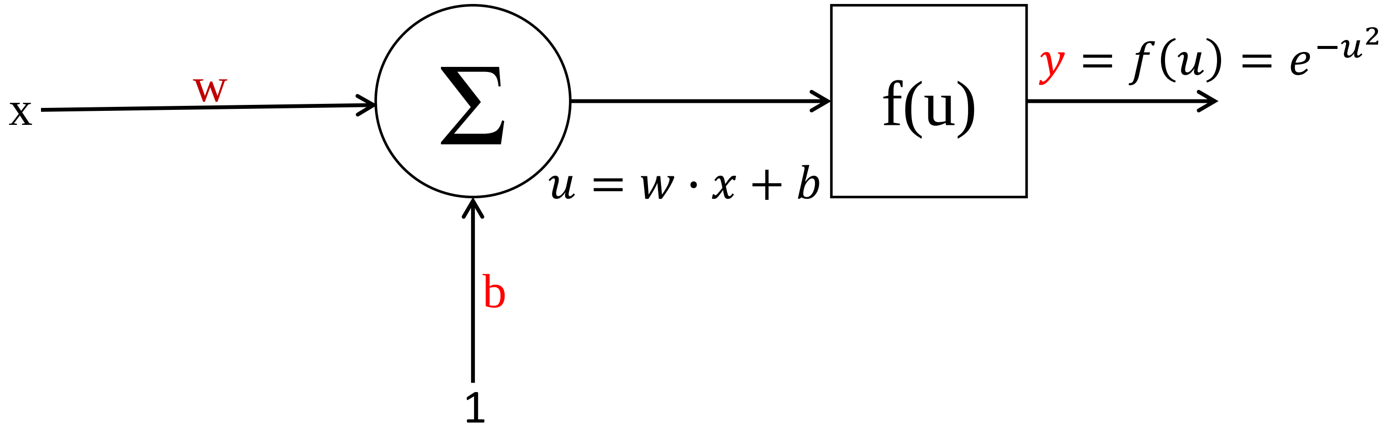
Δυναμικός νευρώνας με μνήμη



$u(k+1) = u(k) + \sum_{i=0}^{n} w_i \cdot x_i$: Συσωρευμένο άθροισμα, k: δείκτης διακριτού χρόνου.

Πως επηρεάζει η πόλωση τη συμπεριφορά του νευρώνα

Perceptron (1 είσοδος και 1 έξοδος)

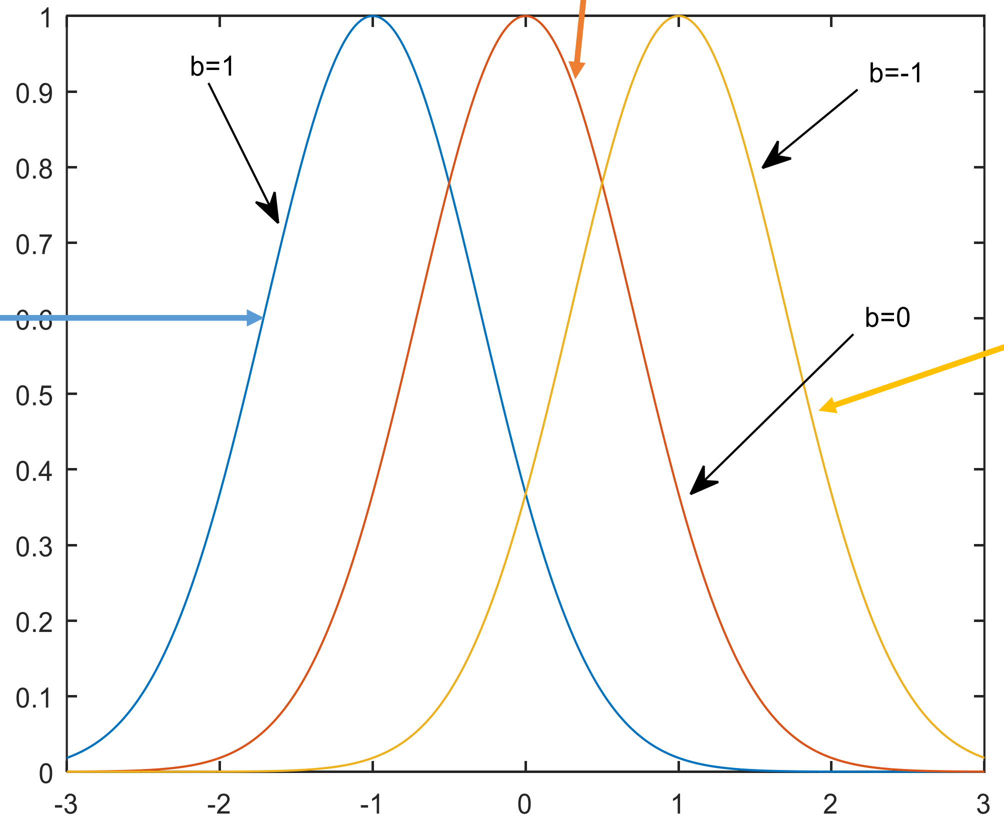


Ελάττωση της πόλωσης b έχει ως αποτέλεσμα μετατόπιση της εξόδου y δεξιά.

Έστω ότι w=1 & b=0 τότε: $y = e^{-(x)^2}$

Έστω ότι w=1 & b=1

τότε: $y = e^{-(x+1)^2}$



Έστω ότι w=1 & b=-1

τότε: $y = e^{-(x-1)^2}$

Πως επηρεάζει το συναπτικό βάρος την έξοδο του νευρώνα

Έστω ότι w=0,5 & b=0 τότε:

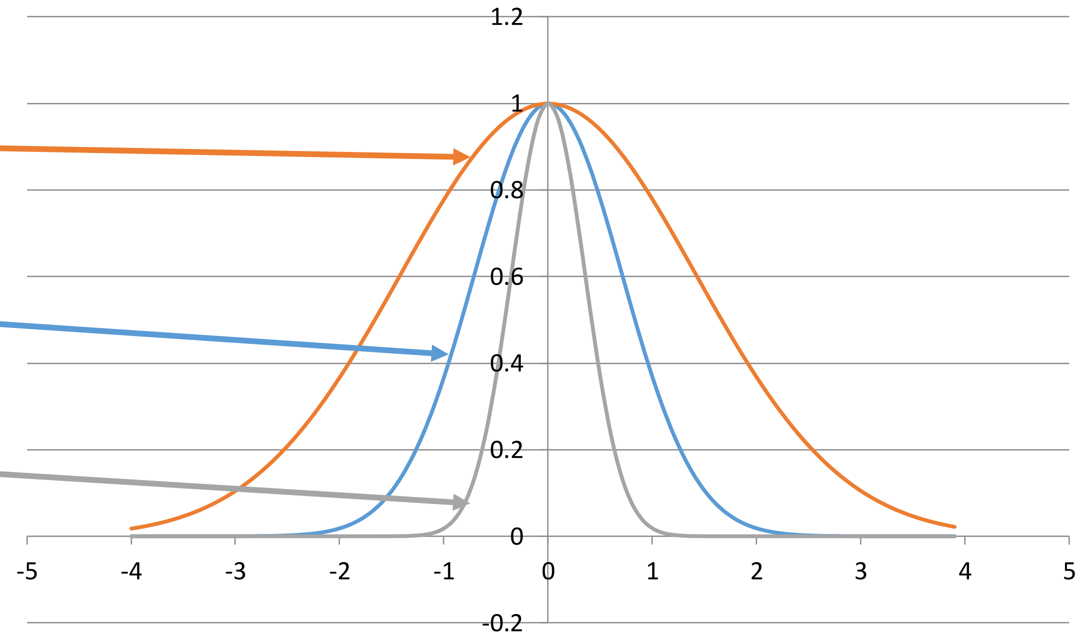
$$y = e^{-(0,5x)^2}$$

Έστω ότι w=1 & b=0 τότε:

$$y = e^{-x^2}$$

Έστω ότι w=2 & b=0 τότε:

$$y = e^{-(2x)^2}$$



Αύξηση του w έχει ως αποτέλεσμα τη συρρίκνωση της εξόδου y.

Παραγώγιση συναρτήσεων ενεργοποίησης

1. $f(u) = u \Rightarrow f'(u) = 1$

2. $f(u) = \dfrac{1}{1+e^{-u}} \Rightarrow f'(u) = f(u)\cdot\left(1 - f(u)\right)$

3. $f(u) = \dfrac{e^{u} - e^{-u}}{e^{u} + e^{-u}} \Rightarrow f'(u) = \left(1 - f(u)\right)\cdot\left(1 + f(u)\right)$

4. $f(u) = \dfrac{u}{\left(1+u^{2}\right)^{0.5}} \Rightarrow f'(u) = \left(\dfrac{f(u)}{u}\right)^{3}$

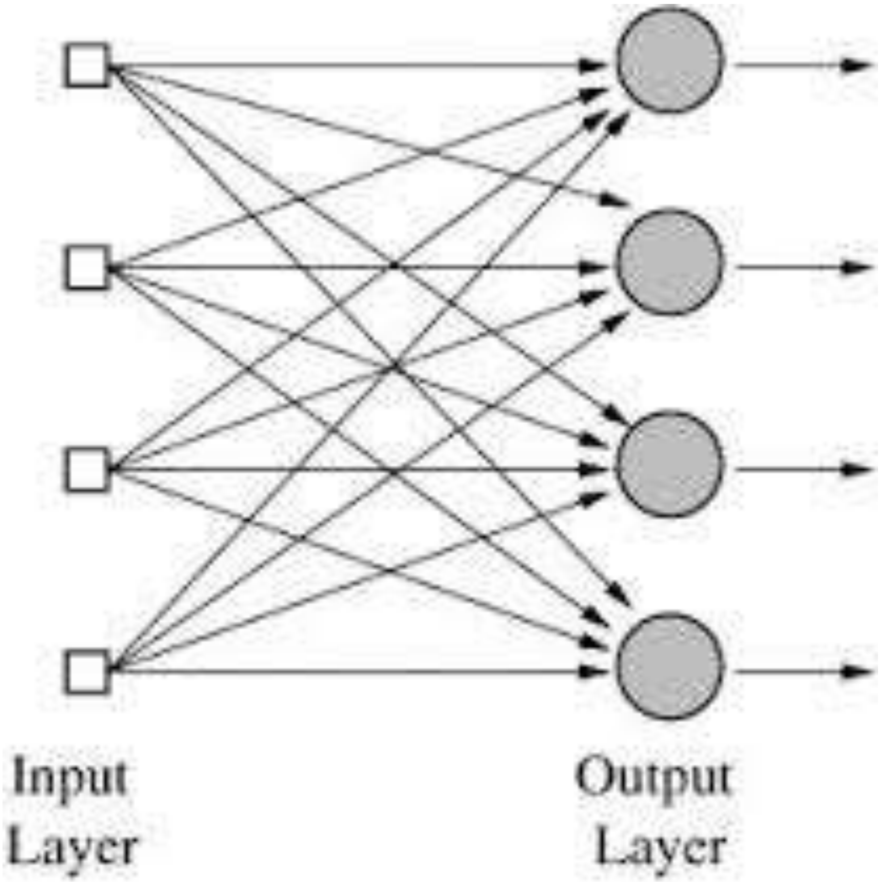
5. $f(u) = \dfrac{1-e^{-a\cdot u}}{1+e^{-a\cdot u}} = \tanh\left(\dfrac{a\cdot u}{2}\right) \Rightarrow f'(u) = \dfrac{a}{2}\left(1 - f^{2}(u)\right)$

Αρχιτεκτονικές ΤΝΔ

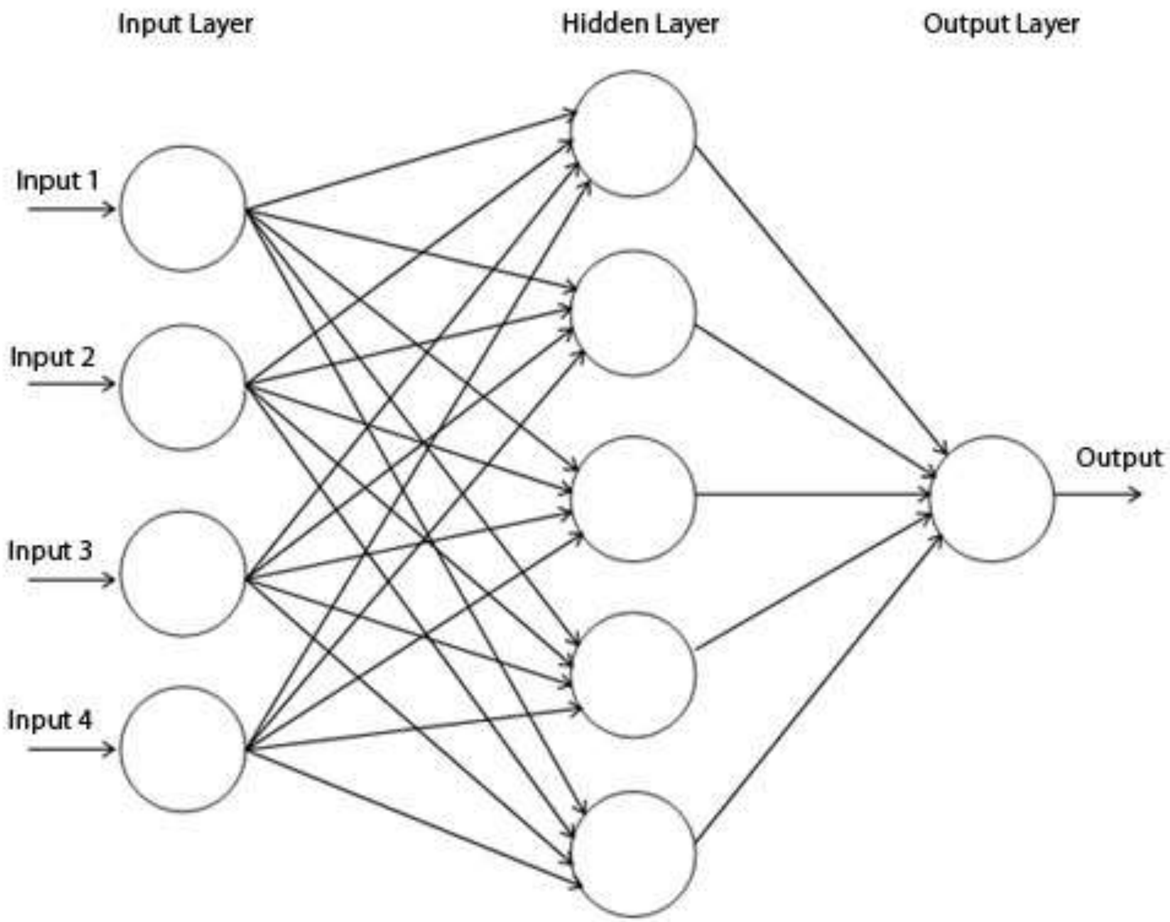
Τα ΤΝΔ μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε δύο κατηγορίες βασιζόμενοι στην αρχιτεκτονική των ΤΝΔ:

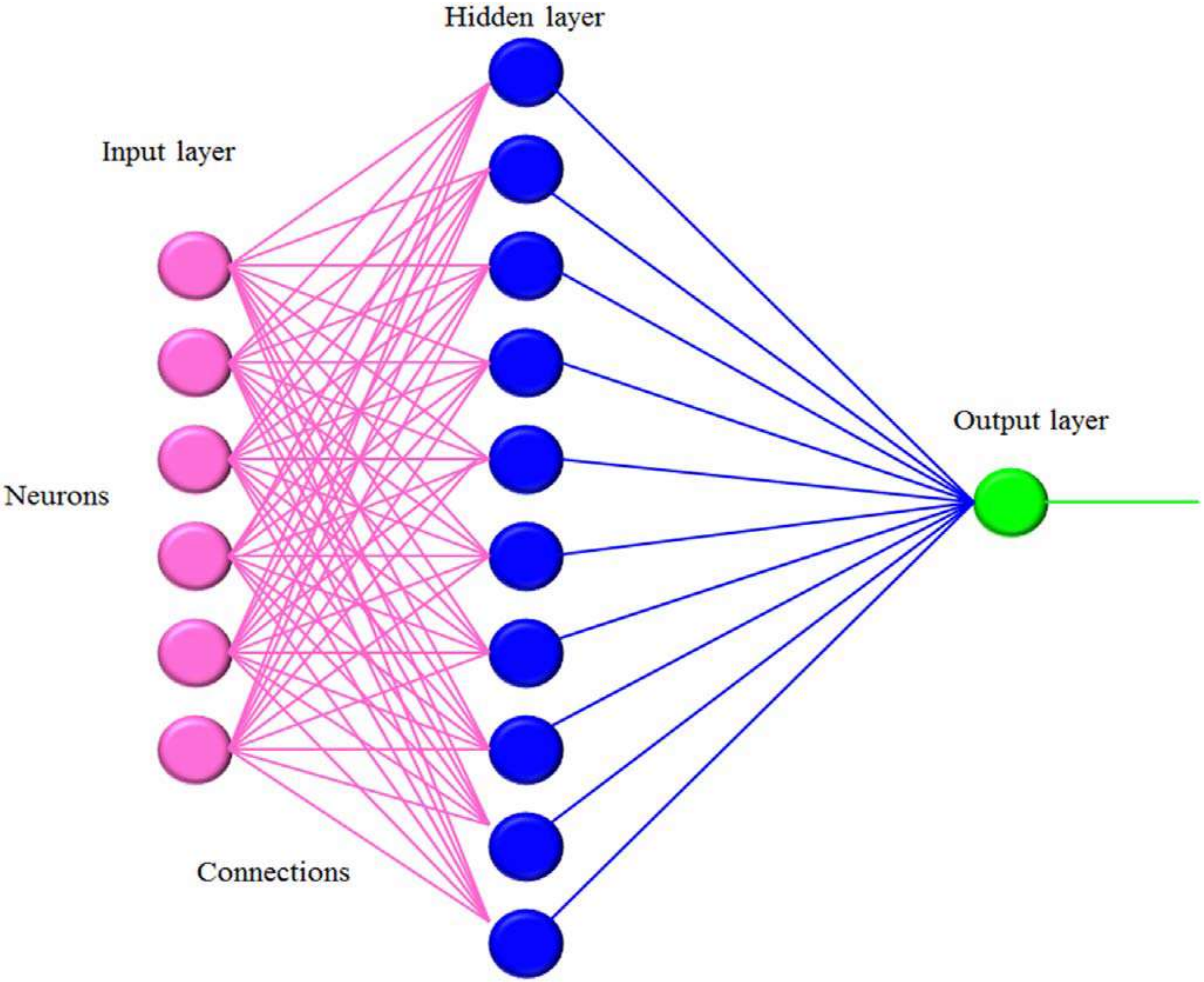
- ΤΝΔ προσοτροφοδότησης
- Αναδρομικά ΤΝΔ

Μονοστρωματικό ΤΝΔ προσοτροφοδότησης (feedforward)



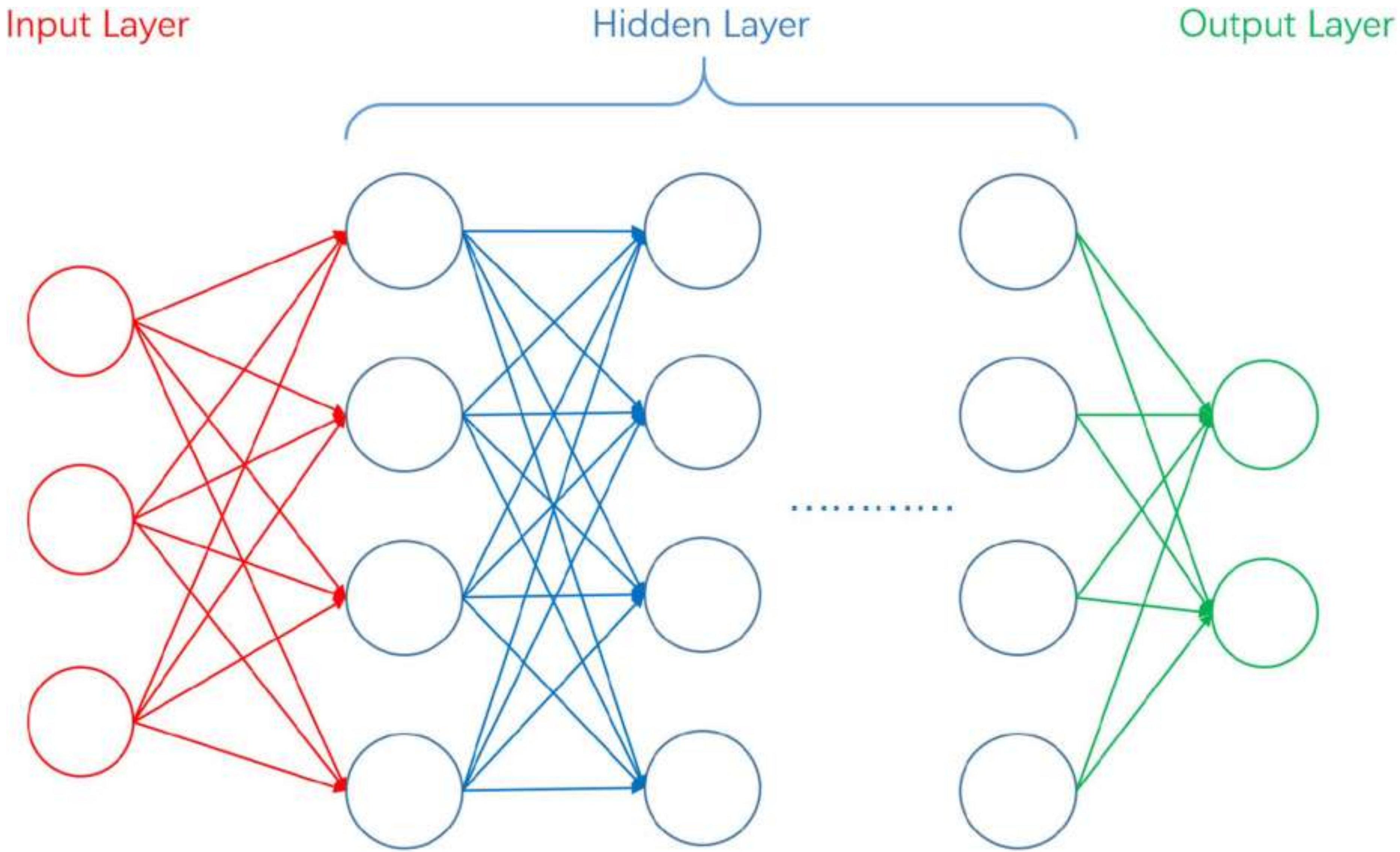
Πολυστρωματικό ΤΝΔ προσοτροφοδοτησης με ένα κρυφό στρώμα (πλήρως διασυνδεδεμένο)




Hidden layer
Input layer
Neurons
Output layer
Connections

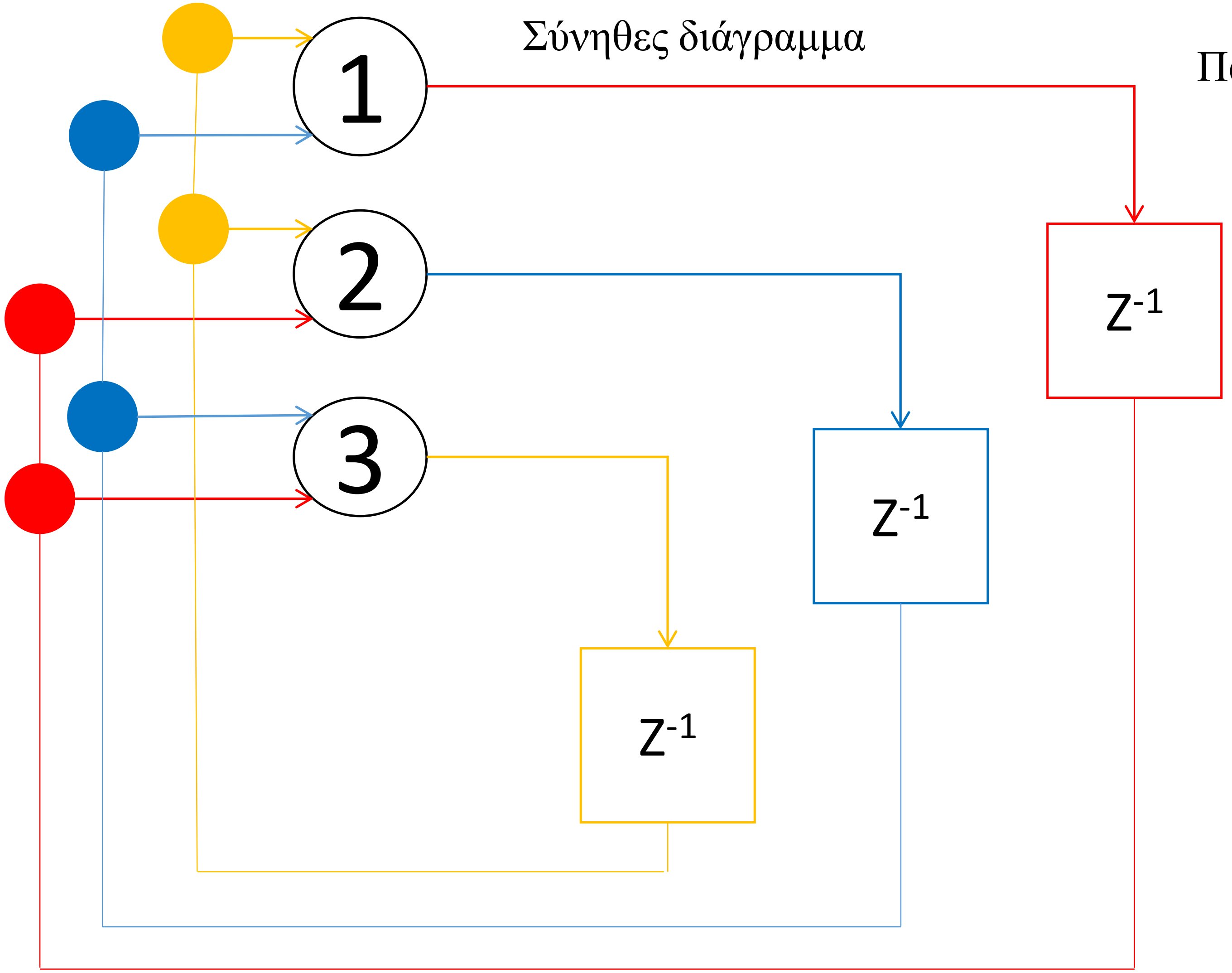
MLP: $p - m_1 - m_2 - \ldots - m_n - n$

p: αριθμός των εισόδων, m_i: αριθμός κόμβων στο i-οστό κρυμμένο επίπεδο, n: αριθμός εξόδων

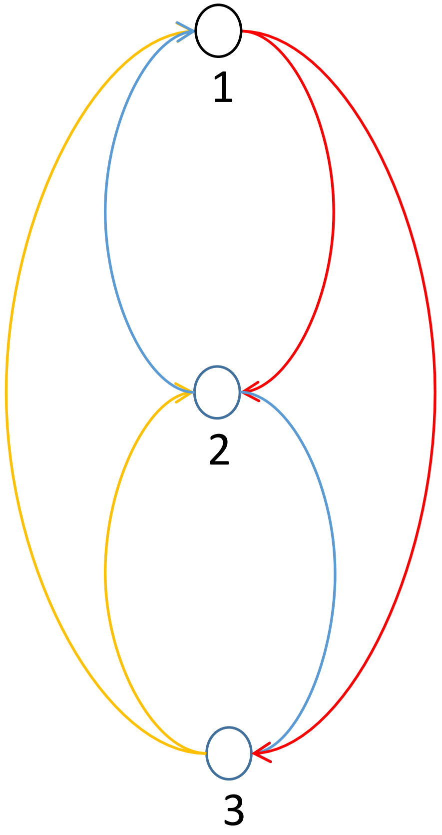


Μονοστρωματικό αναδρομικό ΤΝΔ Hopfield

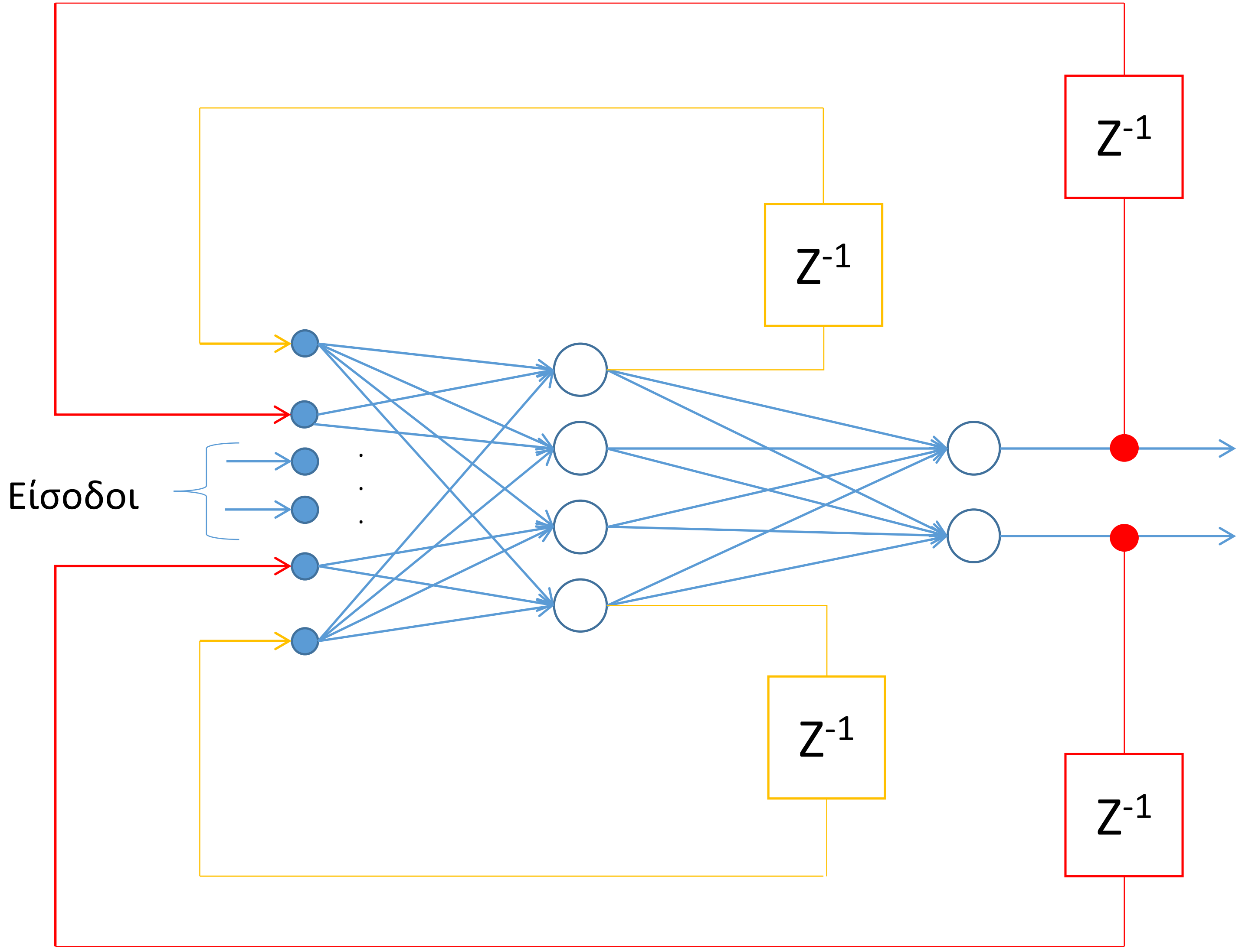
Σύνηθες διάγραμμα



Παράσταση με σηματογράφημα



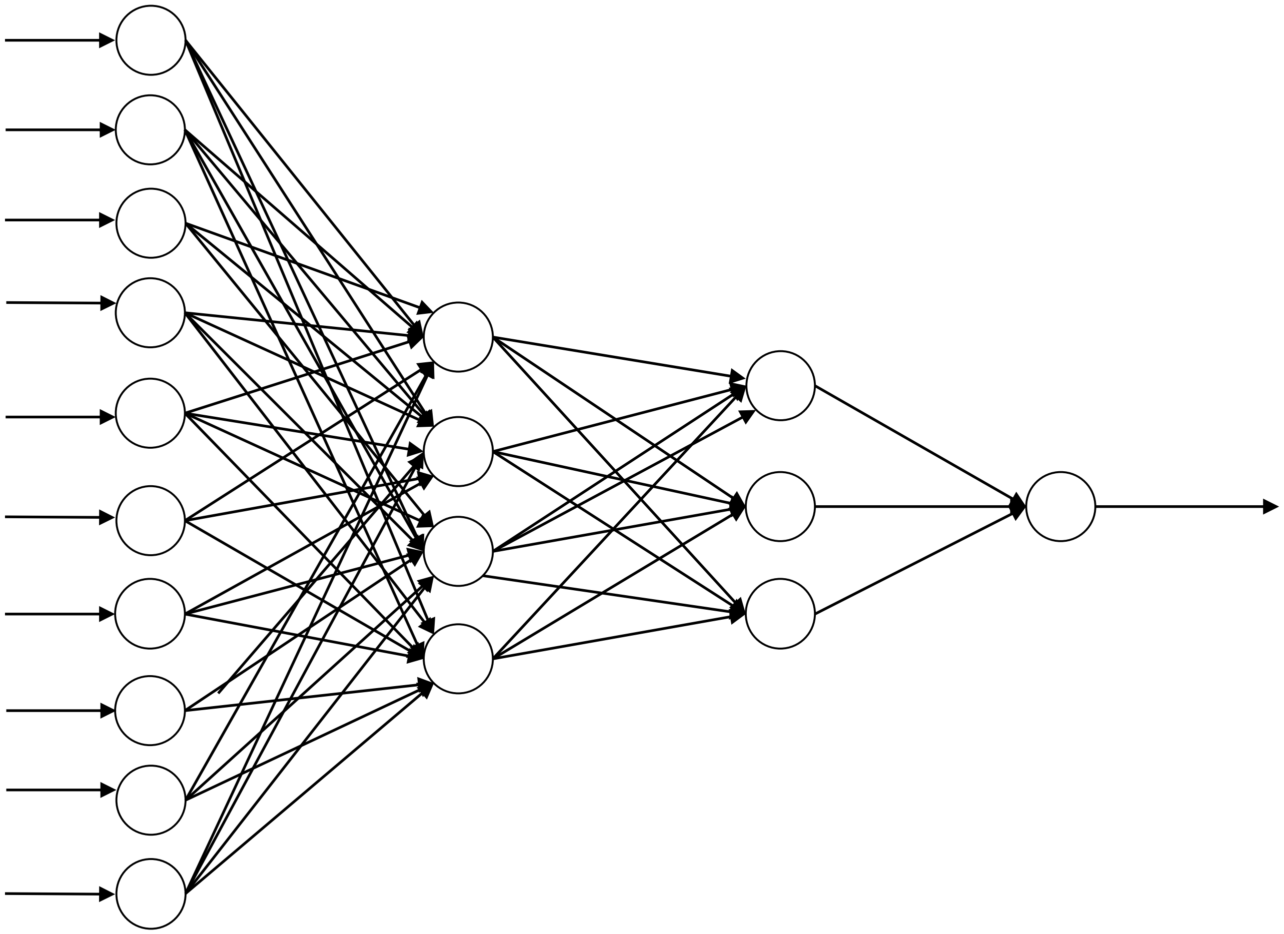
Πολυστρωματικό ανδρομικό ΤΝΔ ενός κρυμμένου στρώματος



Άσκηση

Ένα πλήρως διασυνδεδεμένο εμπρός τροφοδότησης δίκτυο έχει 10 νευρώνες εισόδου, 2 κρυφά επίπεδα με 4 και 3 νευρώνες αντίστοιχα και 1 νευρώνα εξόδου. Σχεδιάστε την αρχιτεκτονική αυτού του δικτύου και υπολογίστε αναλυτικά τις συνολικές συνάψεις που διαθέτει.

Αριθμός συνάψεων: 10x4+4x3+3x1=55



Άσκηση

Βρείτε τον αριθμό των συνάψεων για τα παρακάτω δίκτυα:

1. Ένα πλήρως διασυνδεδεμένο προσοτροφοδότησης με 10 νευρώνες εισόδου, ένα επίπεδο με 4 κρυφούς νευρώνες και 2 νευρώνες εξόδου.

2. Ένα πλήρως διασυνδεδεμένο προσοτροφοδότησης με 10 νευρώνες εισόδου, ένα επίπεδο με 4 κρυφούς νευρώνες και 2 νευρώνες εξόδου, όπου κάθε νευρώνας του κρυφού επιπέδου δέχεται είσοδο από 6 νευρώνες εισόδου και κάθε νευρώνας εξόδου δέχεται είσοδο από 3 νευρώνες του κρυφού επιπέδου.

Λύση

1.

Πλήρως συνδεδεμένο εμπρός τροφοδότηση δίκτυο :

α) Όλοι οι νευρώνες εισόδου τροφοδοτούν τους νευρώνες στο κρυφό επίπεδο

β) Όλοι οι νευρώνες στο κρυφό επίπεδο τροφοδοτούν όλους τους νευρώνες εξόδου

γ) Δεν υπάρχει ανάδραση

Από τα παραπάνω έχουμε:

Από (α) $10 \cdot 4 = 40$ συνάψεις

Από (β) $4 \cdot 2 = 8$ συνάψεις

Άρα έχουμε σύνολο 48 συνάψεις

2.

(α) Κάθε νευρώνας του κρυφού επιπέδου δέχεται είσοδο από 6 νευρώνες επιπέδου άρα $4 \cdot 6 = 24$ συνάψεις

(β) Κάθε νευρώνας εξόδου δέχεται είσοδο από 3 νευρώνες κρυφού επιπέδου άρα $2 \cdot 3 = 6$ συνάψεις

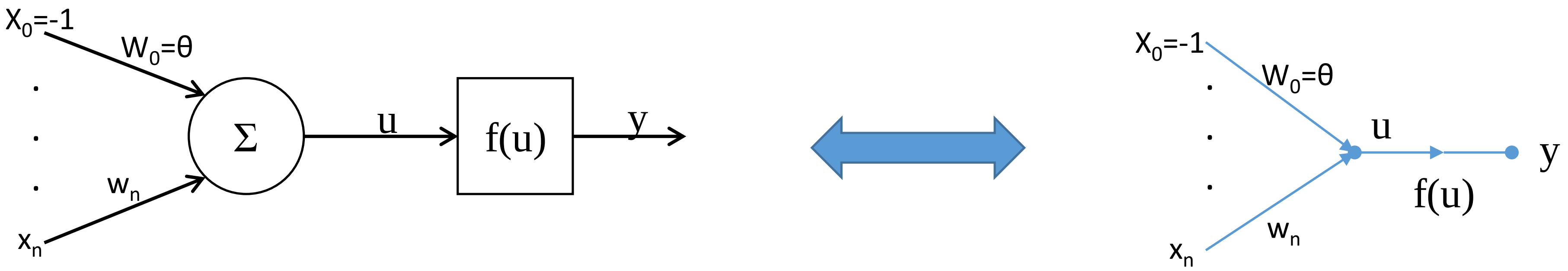
Σ νεπώς, από (α) και (β) έχουμε 24+6=30 συνάψεις

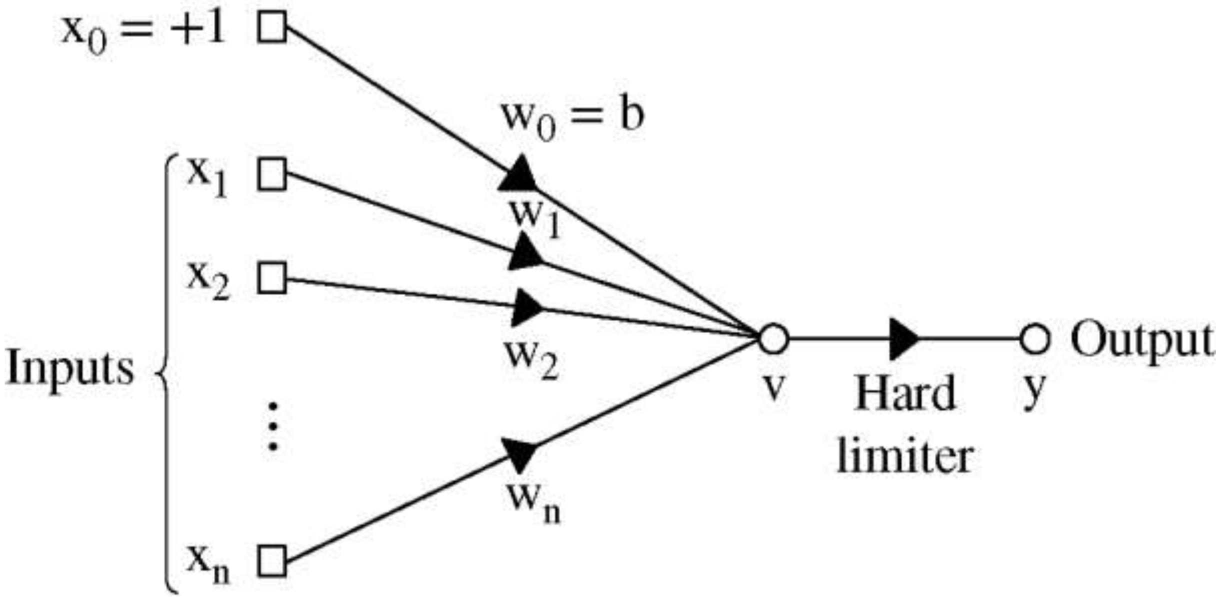
Αναπαράσταση ΤΝΔ ως κατευθυνόμενος γράφος Υπολογισμοί

- Απλοποίηση της παρουσίασης του μοντέλου ενός νευρώνα χρησιμοποιώντας γραφήματα ροής σήματος χωρίς να θυσιάσουμε καμία από τις λειτουργικές ιδιότητες του μοντέλου.
- Τα γραφήματα ροής σήματος μας παρέχουν μια καλή μέθοδο απεικόνισης της ροής των σημάτων

- Διάγραμμα ροής: δίκτυο κατευθυντικών κλάδων που ξεκινούν/καταλήγουν σε κόμβους
  - –Κάθε κόμβος σχετίζεται με το σήμα του
  - –Κάθε κλάδος χαρακτηρίζεται από τη συνάρτηση μεταφοράς
- Συναπτικοί κλάδοι με γραμμική σχέση εισόδου-εξόδου.
- Κλάδοι ενεργοποίησης με μη γραμμική συμπεριφορά.
- Το σήμα «ρέει» μόνο προς την κατεύθυνση του κλάδου.
- Το σήμα σε ένα κόμβο ισούται με το άθροισμα των σημάτων που καταλήγουν στον κόμβο μέσω των κλάδων.
- Το σήμα ενός κόμβου διοχετεύεται σε όλους τους κλάδους που αναχωρούν από τον κόμβο

Σηματογράφημα



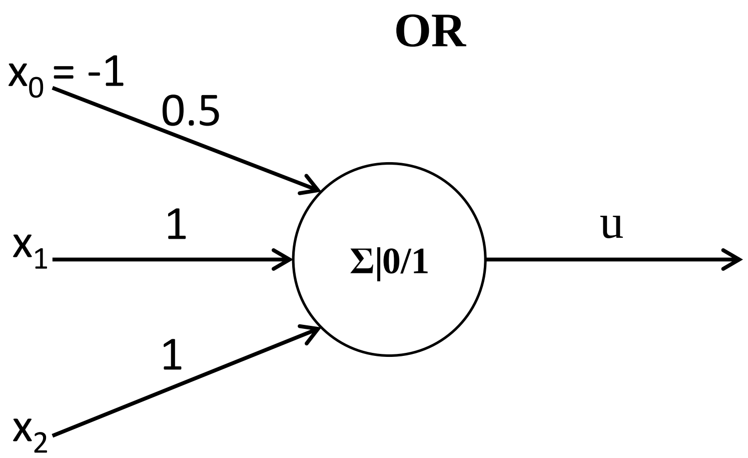


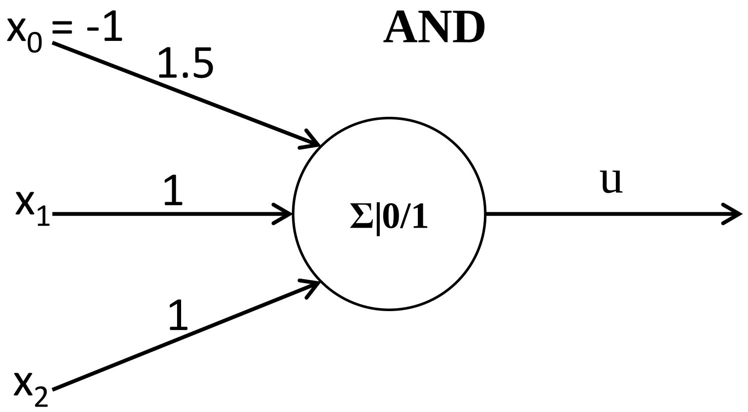
Πίνακας αληθείας λογικών πυλών

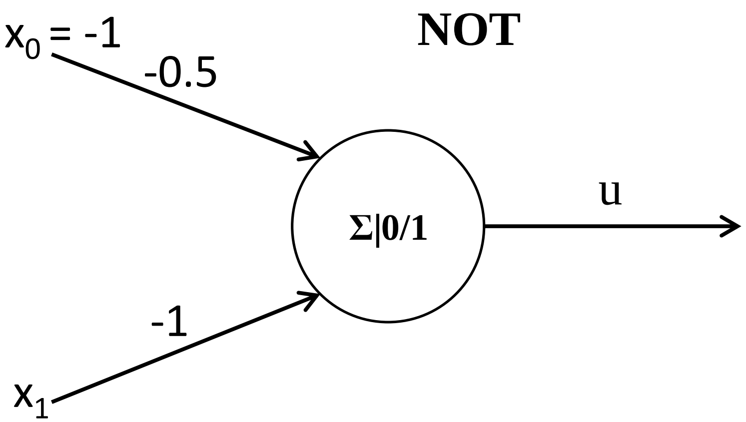
$$AND \rightarrow \min$$
$$OR \rightarrow \max$$
$$\bar{x} \rightarrow 1 - x$$

x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	OR	AND	XOR	$\overline{XOR}$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1

Υλοποίηση λογικών συναρτήσεων με νευρώνες



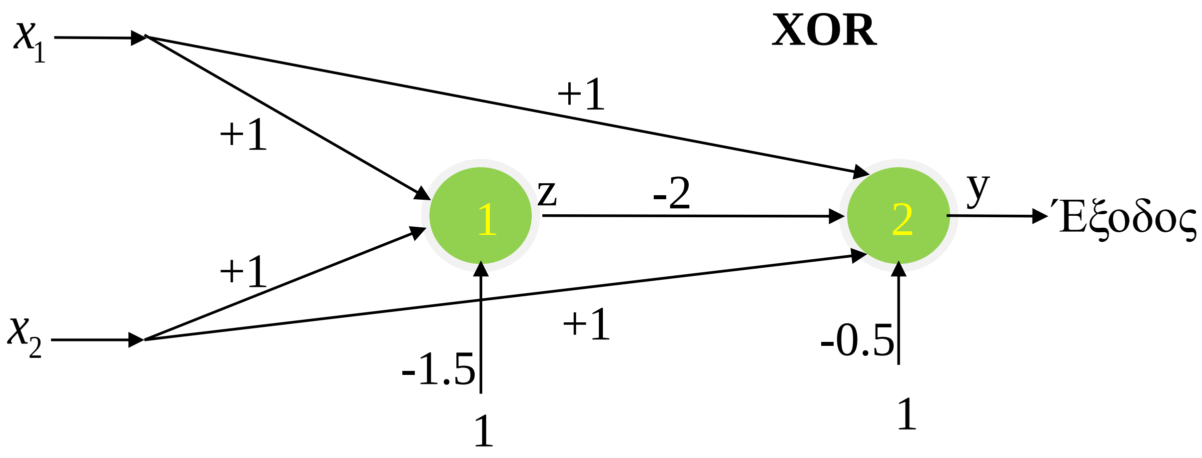




Άσκηση

Δίνεται το παρακάτω ΤΝΔ (2x1x1). Οι νευρώνες είναι τύπου perceptron με συνάρτηση ενεργοποίησης τη βηματική 0/1. Να δειχθεί ότι το δίκτυο υλοποιεί τη λογική συνάρτηση XOR, δημιουργώντας τον πίνακα αλήθειας για το ΤΝΔ. Τι ανιχνεύει η έξοδος z του νευρώνα 1; Οι είσοδοι στο ΤΝΔ είναι:

x_1	x_2
0	0
0	1
1	0
1	1



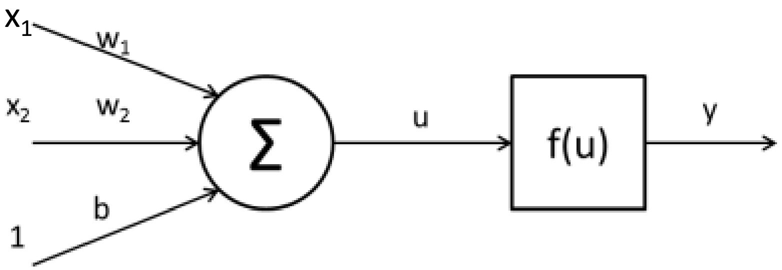
Λύση

Είσοδοι		Κρυμμένο στρώμα	Έξοδος
x_1	x_2	z	y
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

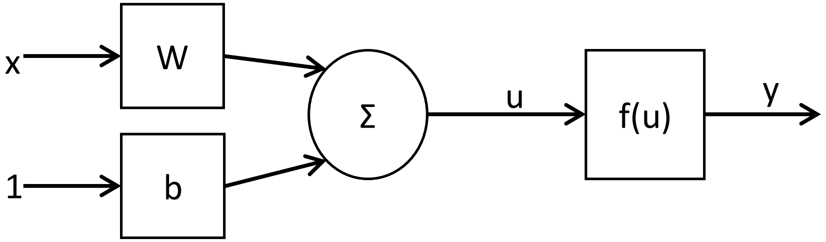
Η έξοδος z του κρυμμένου στρώματος ανιχνεύει την ύπαρξη δύο μονάδων στις εισόδους (συνάρτηση AND).

Διανύσματα και πίνακες στα μοντέλα των ΤΝΔ

2 είσοδοι – 1 νευρώνας εξόδου

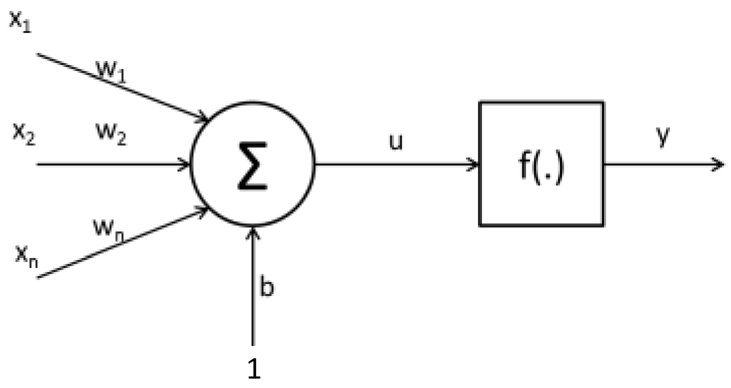


$$u = x_1 w_1 + x_2 w_2 + b$$
$$y = f(u)$$

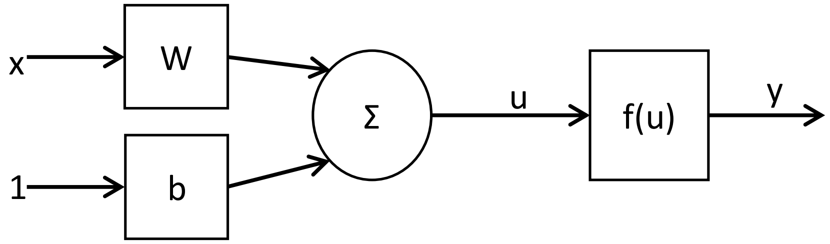


$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$$
$$u = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + b$$
$$y = f(u)$$

n είσοδοι – 1 νευρώνας εξόδου



$$u = x_1 w_1 + x_2 w_2 + \cdots + x_n w_n + b$$
$$y = f(u)$$



$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad w = [w_1 \quad w_2 \ldots \quad w_n]^T$$

$$u = [w_1 \quad w_2 \ldots \quad w_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b$$

$$y = f(u)$$

Μονοστρωματικό ΤΝΔ (SLP)

$$\boldsymbol{w}_{ij} = \begin{bmatrix} w_{11} \\ w_{12} \\ \vdots \\ w_{1n} \end{bmatrix}$$

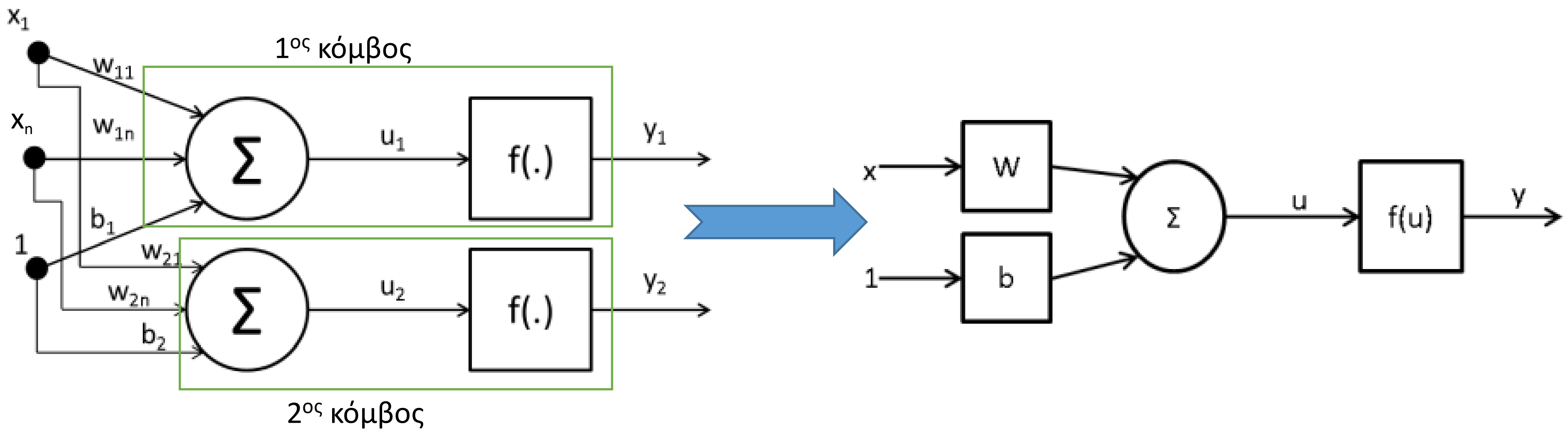
Ο δείκτης i δείχνει τον αντίστοιχο κόμβο

Ο δείκτης j δείχνει την αντίστοιχη είσοδο

$$\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{w}_2 \cdots \boldsymbol{w}_N] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \cdots & w_{N1} \\ w_{12} & w_{22} \cdots & w_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} \cdots & w_{Nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{w}^T = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \cdots & w_{1\boldsymbol{n}} \\ w_{21} & w_{22} \cdots & w_{2\boldsymbol{n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{N1} & w_{N2} \cdots & w_{Nn} \end{bmatrix}$$

n είσοδοι – 2 νευρώνες εξόδου



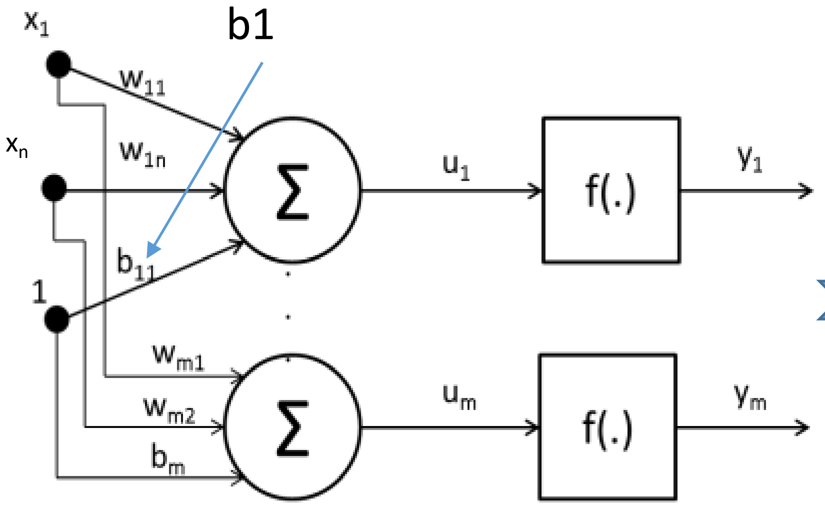
$$u_1 = x_1 w_{11} + \cdots + x_n w_{1n} + b_1$$
$$y_1 = f(u_1)$$

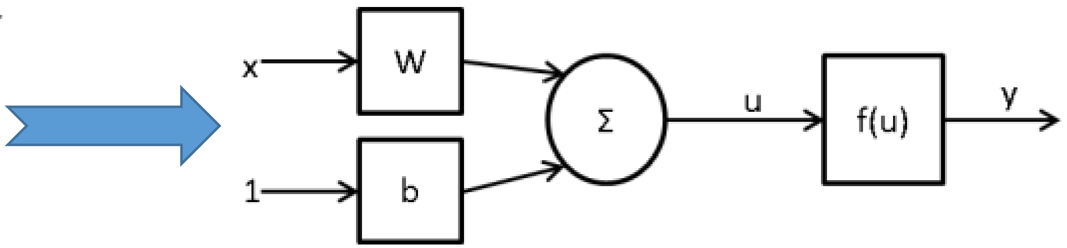
$$u_2 = x_1 w_{21} + \cdots + x_n w_{2n} + b_2$$
$$y_2 = f(u_2)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & \cdots & w_{1n} \\ w_{21} & w_{22} & \cdots & w_{2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

Μονοστρωματικό ΤΝΔ (SLP)

n είσοδοι – m νευρώνες εξόδου





$$u_1 = x_1 w_{11} + \cdots + x_n\, w_{1n} + b_1$$
$$y_1 = f(u_1)$$

.

.

.

$$u_m = x_1 w_{m1} + \cdots + x_n\, w_{mn} + b_m$$
$$y_m = f(u_m)$$

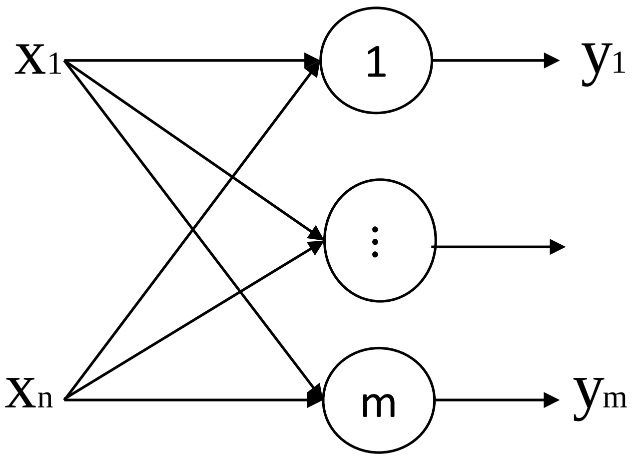
$$\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{m1} & \dots & w_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(u_1) \\ \vdots \\ f(u_m) \end{bmatrix}$$

Μαθηματικός τύπος μονοστρωματικού ΤΝΔ

Διάνυσμα εισόδου: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ $\quad j = 1, \dots, n$

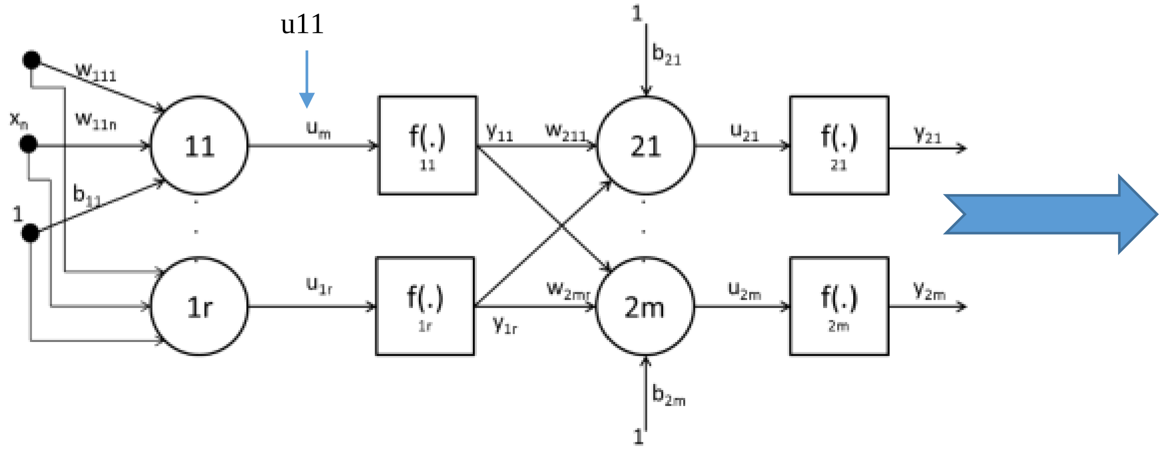
Διάνυσμα εξόδου: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ $\quad k = 1, \dots m$

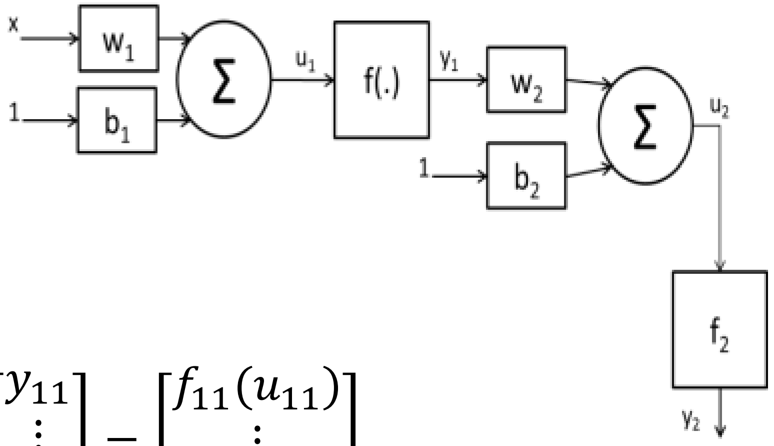


$$y_k = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{kj} \cdot x_j - b_k\right)$$

Πολυστρωματικό ΤΝΔ (MLP)

n είσοδοι, r κόμβοι στο κρυμμένο στρώμα και m νευρώνες εξόδου





$$\begin{bmatrix} u_{11} \\ \vdots \\ u_{1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{111} & \cdots & w_{11n} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{1r1} & \cdots & w_{1rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{1r} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(u_{11}) \\ \vdots \\ f_{1r}(u_{1r}) \end{bmatrix}$$

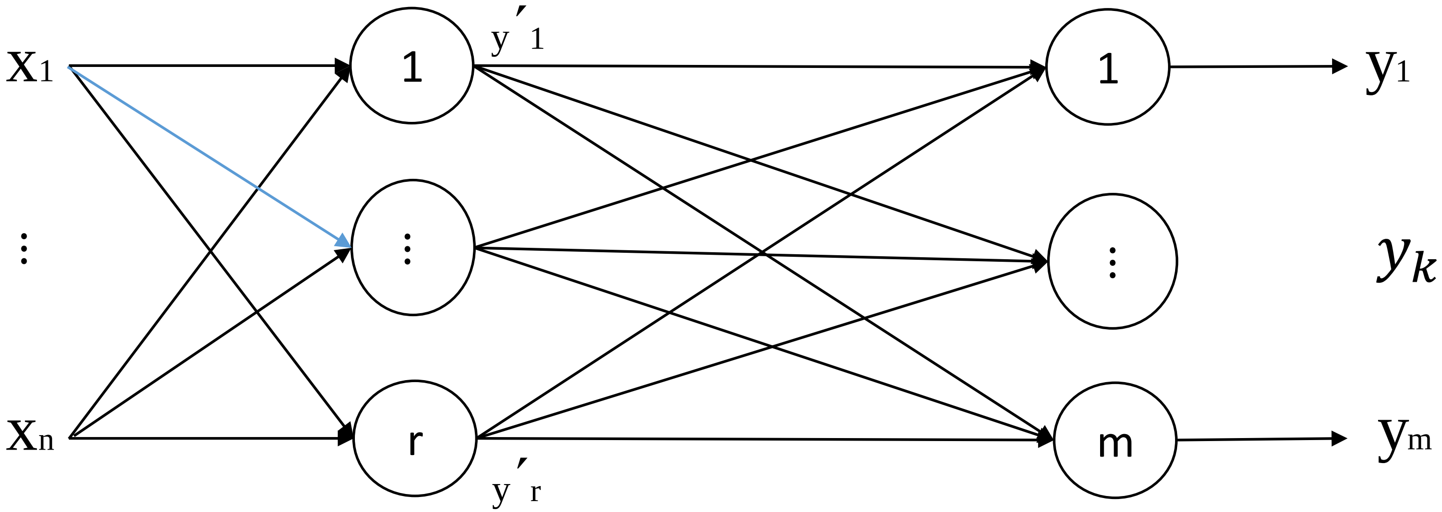
$$\begin{bmatrix} u_{21} \\ \vdots \\ u_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_{211} & \cdots & w_{21r} \\ \vdots & & \vdots \\ w_{2m1} & \cdots & w_{2nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{1r} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{21} \\ \vdots \\ b_{2m} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} y_{21} \\ \vdots \\ y_{2m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{21}(u_{21}) \\ \vdots \\ f_{2m}(u_{2m}) \end{bmatrix}$$

Μαθηματικός τύπος πολυστρωματικού ΤΝΔ

Διάνυσμα εισόδου: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ $\quad j = 1, \dots, n$

Έξοδος κρυφού επιπέδου: $\boldsymbol{y}' = (y_1', y_2', \dots, y_r')^T$ $\quad i = 1, \dots, r$

Έξοδος ΤΝΔ: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ $\quad k = 1, \dots m$



$$y_k = f\left(\sum_{i=1}^{r} w_{ki}' \cdot y_i' - b_k\right)$$

$$y_i' = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot x_j - b_i'\right)$$

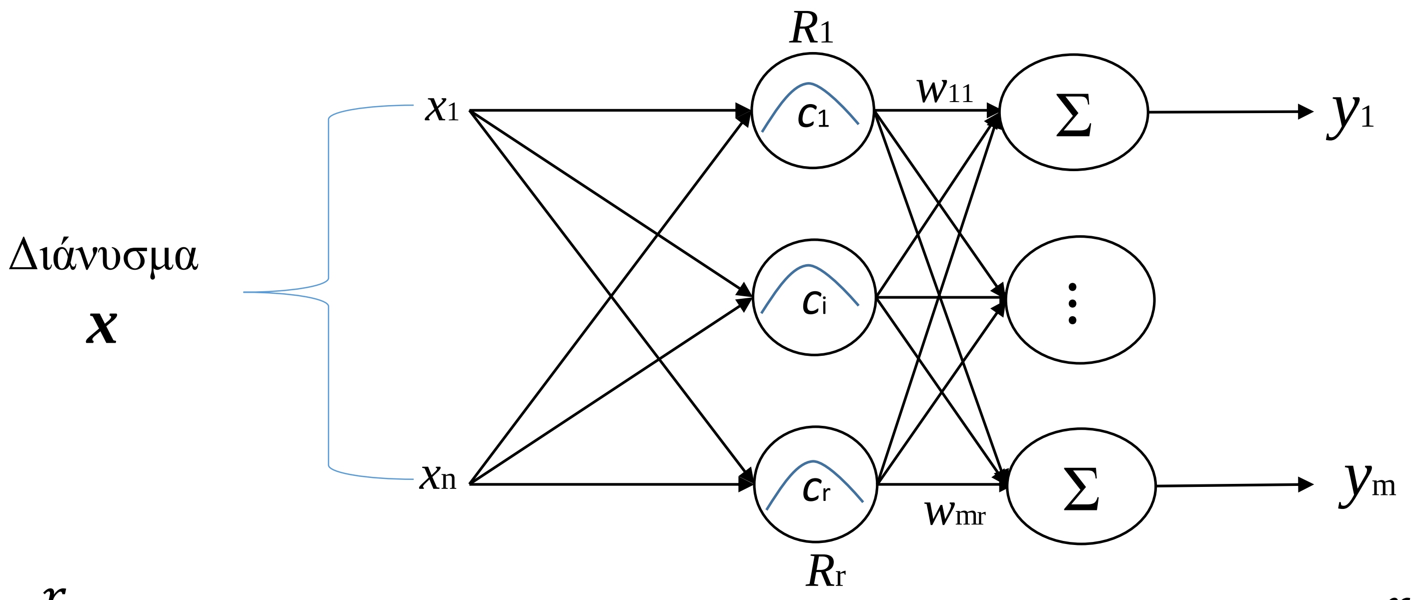
ΤΝΔ με ακτινικές συναρτήσεις βάσης (Radial Basis Function, RBF)

Τα δίκτυα RBF:

- Είναι εντελώς όμοια με ένα δίκτυο MLP.
- Είναι δίκτυα δυο στρωμάτων (χωρίς να υπολογίζουμε το στρώμα εισόδου), όπου το κρυφό στρώμα περιέχει την ακτινική συνάρτηση ενεργοποίησης και το στρώμα εξόδου ένα γραμμικό νευρώνα.
- Η διαφορά των RBF και MLP είναι ότι ένα RBF πραγματοποιεί μια τοπική απεικόνιση ενώ ένα MLP πραγματοποιεί μια συνολική απεικόνιση.
- Μπορούν να προσεγγίσουν οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση.
- Είναι ισοδύναμα με μηχανές ασαφούς λογικής.
- Αποτελούν μια εναλλακτική πρόταση μοντελοποίησης των ΤΝΔ.

Ενα τυπικό δίκτυο RBF και ο μαθηματικός τύπος

Διάνυσμα εισόδου: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$
Διάνυσμα εξόδιυ: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$



$$j = 1, \dots, n$$
$$i = 1, \dots, r$$
$$k = 1, \dots m$$

$$y_k(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{r} w_{ki} \cdot R_i(\boldsymbol{x})$$ με κανονικοποιημένη έξοδο: $$y_k(\boldsymbol{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w_{ki} \cdot R_i(\boldsymbol{x})}{\sum_{i=1}^{r} R_i(\boldsymbol{x})}$$

Τοπική συνάρτηση βάσης ακτινικού τύπου (Gauss): $R_i(\boldsymbol{x}) = e^{-\frac{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{c}_i\|^2}{\sigma_i^2}}$

Η συνάρτηση ακτινικού τύπου έχει κέντρο c και εύρος σ.

Εκπαίδευση ακτινικού δικτύου

- Οι νευρώνες του ακτινικού επιπέδου είναι τόσοι όσα και τα παραδείγματα εκπαίδευσης.
- Κάθε ακτινικός νευρώνας αντιστοιχεί σε ένα παράδειγμα εκπαίδευσης.
- Δεν υπάρχουν συναπτικά βάρη μεταξύ εισόδων και κρυφού στρώματος.
- Στην πρώτη φάση εκπαίδευσης καθορίζονται τα κέντρα των τοπικών συναρτήσεων βάσης. Στη δεύτερη φάση εκπαίδευσης καθορίζουμε τις συνδέσεις (συναπτικά βάρη) στο δεύτερο επίπεδο χρησιμοποιώντας τους αλγορίθμους βελτιστοποίησης βαθμίδας ή των ελαχίστων τετραγώνων.
- Τα βάρη μπορούν να υπολογιστούν από τα παραδείγματα εκπαίδευσης.
- Ο υπολογισμός αυτών των βαρών βασίζεται στην επίλυση συστημάτων P γραμμικών εξισώσεων με P αγνώστους, όπου P το πλήθος των παραδειγμάτων άρα και των ακτινικών νευρώνων και P βέβαια το πλήθος των βαρών στις εισόδους του κάθε γραμμικού νευρώνα.

Σχεδιασμός ενός δικτύου RBF

1. **Επιλογή των κέντρων c των κρυφών νευρώνων**
   α. Κάθε πρότυπο και ένα κέντρο $c_i = x_i, i = 1,2,\ldots,P$, όπου P τα πρότυπα εισόδου.
   β. Τυχαία επιλογή προτύπων για να γίνουν κέντρα. Ο αριθμός των κέντρων K: K=10% του P.
   γ. Μέθοδοι ομαδοποίησης (clustering: K-μέσων, κ.α.)

2. **Υπολογισμός της τιμής του εύρους σ των Γκαουσιανών**
   Δίνουμε σε όλους τους νευρώνες το ίδιο εύρος: $\sigma_1 = \cdots = \sigma_r = \sigma = \frac{\mathrm{D}}{\sqrt{2P}}$, όπου D είναι η απόσταση μεταξύ των πιο απομακρυσμένων κέντρων και P το σύνολο των προτύπων.

3. **Υπολογισμός των συναπτικών βαρών**
   α. Βασίζεται στην επίλυση συστήματος P γραμμικών εξισώσεων με P αγνώστους, όπου P το πλήθος των υποδειγμάτων-παραδειγμάτων.
   β. Εκπαίδευση με επίβλεψη (Generalized RBF).

4. **Η ανάκληση του δικτύου RBF** είναι όμοια με αυτή ενός δικτύου MLP.

Παράδειγμα

Δίνονται δύο σημεία της συνάρτησης $y = x^2$

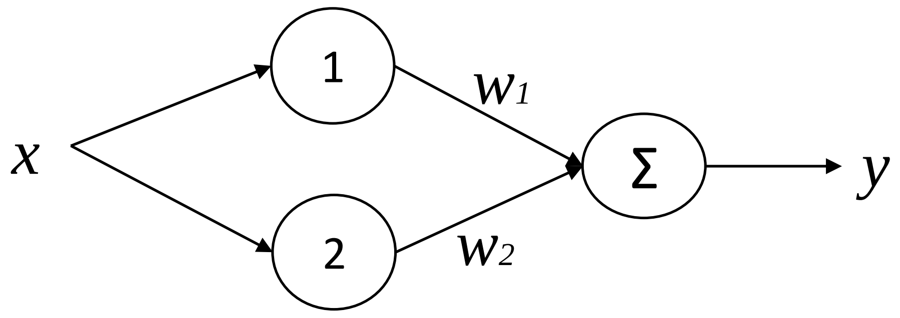
x	0	2
y	0	4

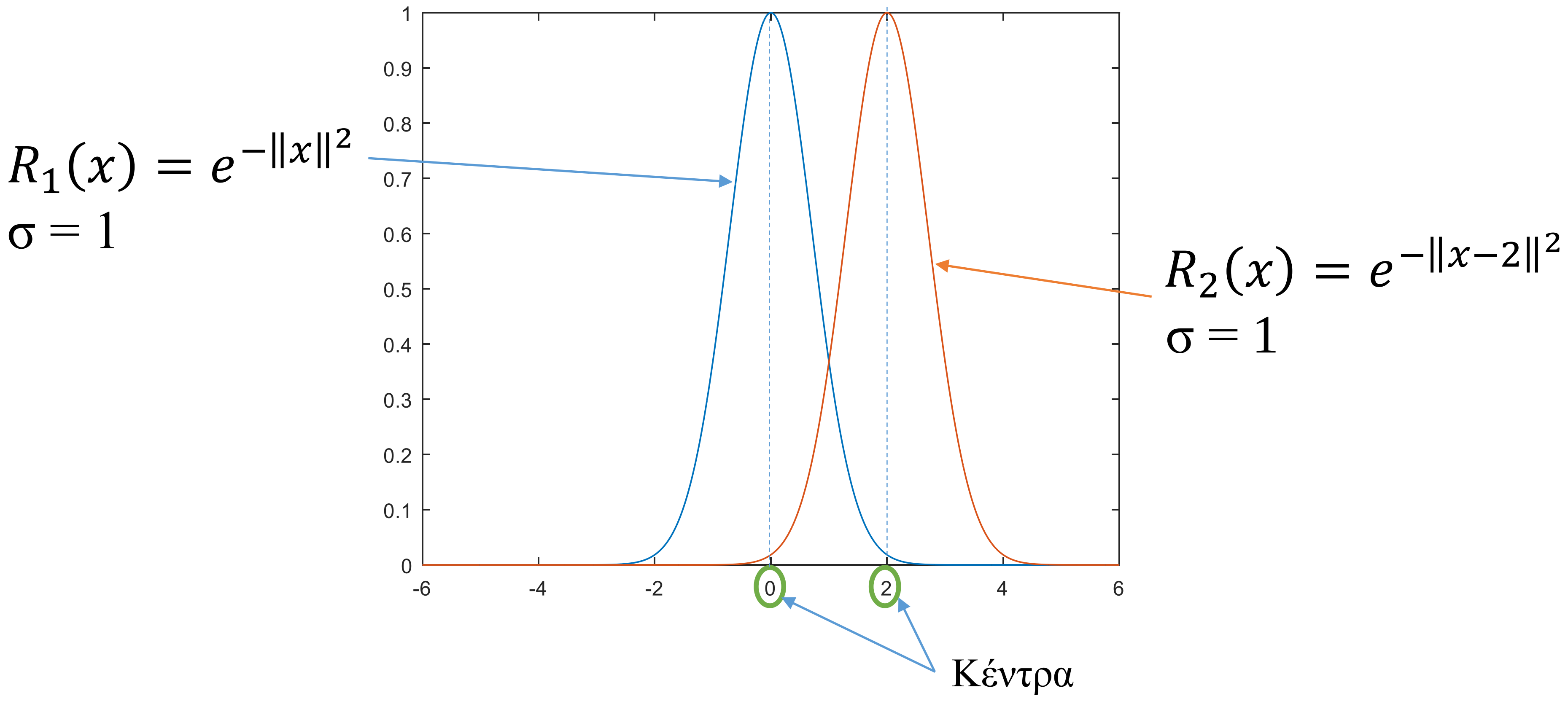
Κατασκευάστε ένα ακτινικό δίκτυο και προβλέψτε την τιμή της συνάρτησης στα σημεία $x = 0.5$ και $x = 3$.

Δίνονται: $R_1(0) = 1, R_1(2) = 0.0813, R_2(0) = 0.083, R_2(2) = 1, R_1(0.5) = 0.7788, R_2(0.5) = 0.1054$

Απάντηση

Το ακτινικό δίκτυο που θα κατασκευαστεί θα έχει δύο ακτινικούς νευρώνες (1,2) στο κρυφό επίπεδο και ένα γραμμικό νευρώνα (Σ) στο επίπεδο της εξόδου. Τα κέντρα των ακτινικών συναρτήσεων είναι οι τιμές των δεδομένων της μεταβλητής *x*: $c_1 = 0, c_2 = 2$. Πρέπει να υπολογίσουμε τα βάρη w1 και w2. Αυτά υπολογίζονται με βάση την απαίτηση ότι το ακτινικό δίκτυο θα πρέπει να βγάζει ακριβή αποτελέσματα, όταν η είσοδος είναι μία εκ των δύο εισόδων των παραδειγμάτων εκπαίδευσης. (D = 2, P = 2, σ = 1).





$R_1(x) = e^{-\|x\|^2}$
σ = 1
$R_2(x) = e^{-\|x-2\|^2}$
σ = 1
Κέντρα
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-6
-4
-2
0
2
4
6

Για κάθε ένα από τα δύο παραδείγματα δημιουργούμε μια γραμμική εξίσωση με αγνώστους τα δύο συναπτικά βάρη. Δημιουργείται ένα σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:

$$\begin{array}{l} \text{1ο παράδειγμα: } R_1(0)\cdot w_1 + R_2(0)\cdot w_2 = 0 \\ \text{2ο παράδειγμα: } R_1(2)\cdot w_1 + R_2(2)\cdot w_2 = 4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} w_1 = -0.0732 \\ w_2 = 4.0013 \end{array}$$

Για να υπολογίσουμε την έξοδο του δικτύου για τις διάφορες τιμές του x εφαρμόζουμε τον τύπο των ακτινικών δικτύων.

Για x = 2 έχουμε $y = R_1(2)\cdot w_1 + R_2(2)\cdot w_2 = 3.9953$
Η έξοδος του δικτύου είναι στο y = 4 που αναμέναμε.

Για x = 0.5 έχουμε $y = R_1(0.5)\cdot w_1 + R_2(0.5)\cdot w_2 = 0.3636$
Η έξοδος του δικτύου είναι σχετικά κοντά από την y = 0.25 που αναμέναμε. Είναι λίγο μεγαλύτερη διότι συμμετέχει κατά ένα μικρό βαθμό συμμετοχής και ο δεύτερος νευρώνας.

Για x = 3 έχουμε $y = R_1(3)\cdot w_1 + R_2(3)\cdot w_2 = 1.47$
Η έξοδος του δικτύου είναι αρκετά μακριά από την y = 9 που αναμέναμε. Ο λόγος είναι ότι όσο η απόσταση από το κοντινότερο παράδειγμα μεγαλώνει, τόσο η έξοδος μικραίνει.

$$y = \sin(x)$$

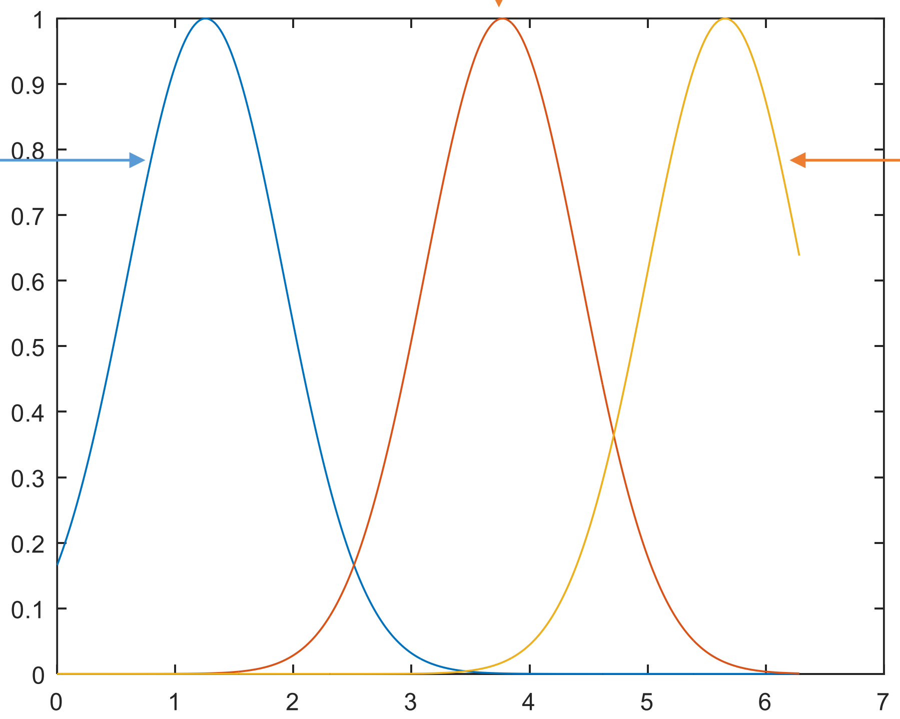
x	y
0	0
0.6283	0.5878
1.2566	**0.9511**
1.8850	0.9511
2.5133	0.5878
3.1416	0.0000
3.7699	**-0.5878**
4.3982	-0.9511
5.0265	-0.9511
5.6549	**-0.5878**
6.2832	-0.0000

$$c_1 = \frac{2\pi}{5} = 1.2566,$$
$$c_2 = \frac{6\pi}{5} = 3.7699,$$
$$c_3 = \frac{9\pi}{5} = 5.6549$$

(D = 4.3983, P = 11, σ = 0.9377)

$$R_2(x) = e^{-\left(\frac{x-3.7699}{0.9377}\right)^2}$$

$$R_1(x) = e^{-\left(\frac{x-1.2566}{0.9377}\right)^2}$$



$$R_3(x) = e^{-\left(\frac{x-5.6549}{0.9377}\right)^2}$$

Υπολογισμός των συναπτικών βαρών του RBF

$$\boldsymbol{R}\cdot \boldsymbol{W} = \boldsymbol{Y} \Longrightarrow \begin{bmatrix} R_1(c_1) & R_2(c_1) & R_3(c_1) \\ R_1(c_2) & R_2(c_2) & R_3(c_2) \\ R_1(c_3) & R_2(c_3) & R_3(c_3) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9511 \\ -0.5878 \\ -0.5878 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.0176 \\ 0 & 0.0176 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9511 \\ -0.5878 \\ -0.5878 \end{bmatrix}$$

$$W = R\backslash \mathrm{Y} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9511 \\ -0.5776 \\ -0.5776 \end{bmatrix}$$

Η έξοδος του ακτινικού δικτύου

$$y = R_1(x) \cdot w_1 + R_2(x) \cdot w_2 + R_3(x) \cdot w_3$$

$$y = 0.9511 \cdot e^{-\left(\frac{x-1.2566}{0.9377}\right)^2} - 0.5766 \cdot e^{-\left(\frac{x-3.7699}{0.9377}\right)^2} - 0.5766 \cdot e^{-\left(\frac{x-5.6549}{0.9377}\right)^2}$$

Ανάκληση δικτύου

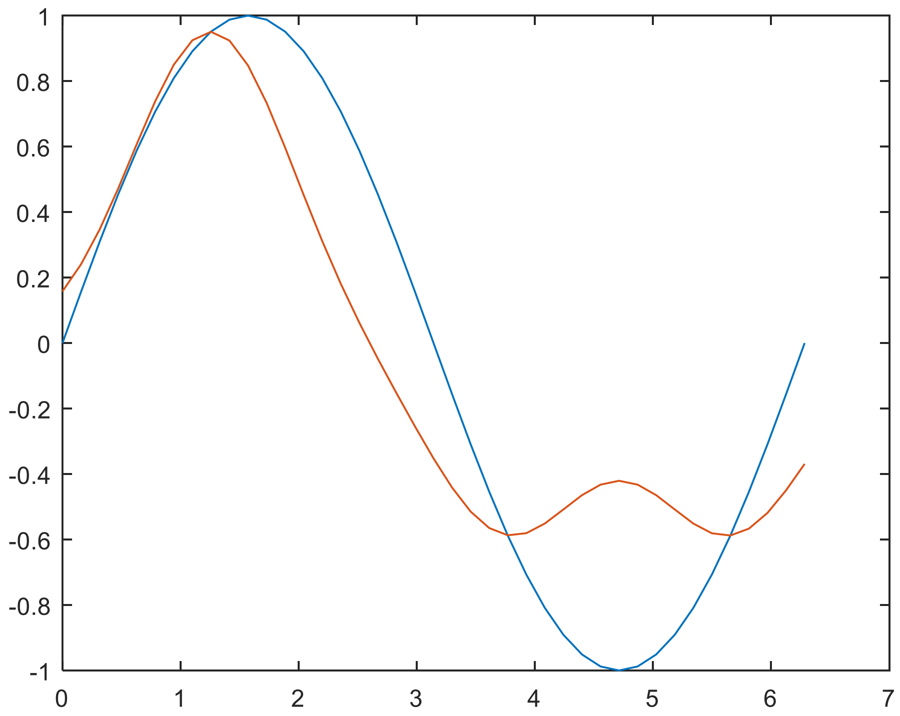
$$y = R_1(x) \cdot w_1 + R_2(x) \cdot w_2 + R_3(x) \cdot w_3 \implies$$
$$y = 0.9511 \cdot e^{-\left(\frac{x-1.2566}{0.9377}\right)^2} - 0.5766 \cdot e^{-\left(\frac{x-3.7699}{0.9377}\right)^2} - 0.5766 \cdot e^{-\left(\frac{x-5.6549}{0.9377}\right)^2}$$

1. Είσοδος: x = 1.2566
Έξοδος $y = R_1(x) \cdot w_1 + R_2(x) \cdot w_2 + R_3(x) \cdot w_3 =$ 0.9511
Απόκλιση: 0

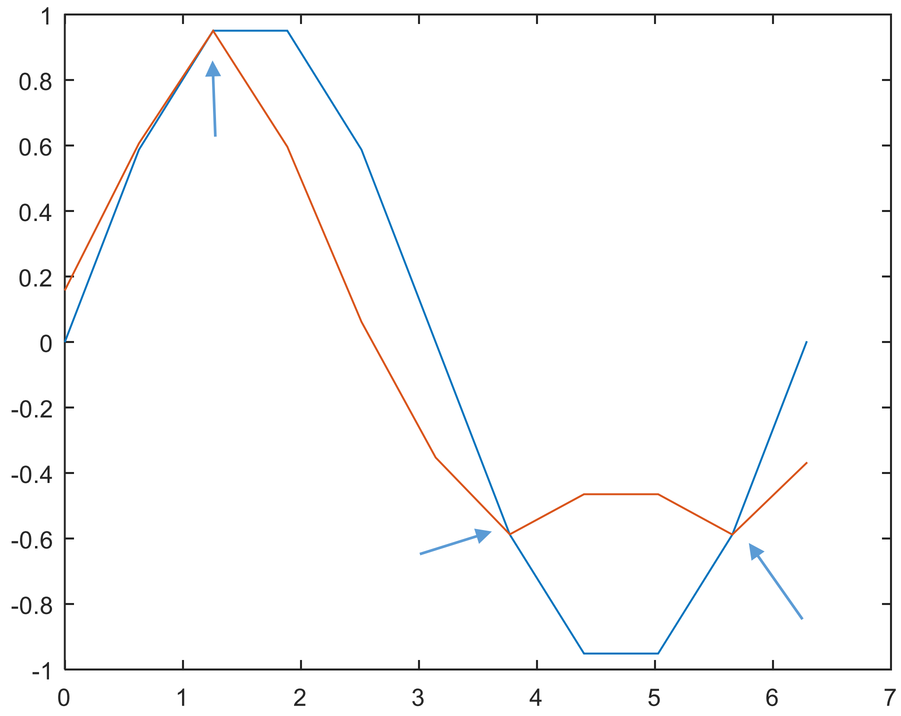
2. Είσοδος: x = 4.3982
Έξοδος $y = R_1(x) \cdot w_1 + R_2(x) \cdot w_2 + R_3(x) \cdot w_3 =$ -0.4645
Απόκλιση: - 0.9511 + 0.4645 = -0.4866

3. Είσοδος: x = 2.5133
Έξοδος $y = R_1(x) \cdot w_1 + R_2(x) \cdot w_2 + R_3(x) \cdot w_3 = 0.415 \cdot 0.9673 - 0.415 \cdot 0.5457 - 0.0041 \cdot 0.5124 = 0.0169$
Απόκλιση: 0.5878 - 0.0169 = 0.5709

Η απόκριση του RBF για 41 τιμές του x



Η απόκριση του RBF για 11 τιμές του x



Τρόποι μάθησης ΤΝΔ

- Με επίβλεψη
- Χωρίς επίβλεψη
- Ενισχυτική

Βασικοί κανόνες μάθησηςΤΝΔ

- Μάθηση διόρθωσης σφάλματος
  Κανόνας δ, κανόνας Perceptron, BP, BPTT
- Εββιανή μάθηση (Hebb)
- Ανταγωνιστική μάθηση

Ταξινόμηση νευρωνικών αλγορίθμων

Το αντικείμενο μελέτης των ΤΝΔ είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων που να μιμούνται την αρχιτεκτονική και τη λειτουργία των βιολογικών νευρωνικών δικτύων.

- **ΤΝΔ**
  - Εκπαιδευόμενα βάρη
    - Με επίβλεψη
      - **Μάθηση: Κανόνας δ (ADALINE)**
      - **Κανόνας Perceptron (Perceptron)**
      - **Μάθηση: BP (MLP)**
      - BPTT: Αναδρομικά MLP
      - RBF, Μοντέλα SVM, Στοχαστικές Μνήμες
    - Χωρίς επίβλεψη
      - Συσχετιστικά Μοντέλα – Εββιανή μάθηση (Hebb)
        - Δίκτυα: PCA, ICA
      - Ανταγωνιστικά μοντέλα – Ανταγωνιστική μάθηση
        - **Δίκτυο Kohonen (SOM),** LVQ, ART
  - Σταθερά βάρη – Ανάθεση τιμών στα συναπτικά βάρη
    - Δίκτυο Hopfield
    - **Συσχετιστικές μνήμες**
    - Brain State in Box

Μάθηση των ΝΔ

Το περιβάλλον στο οποίο εργάζεται ένα ΝΔ καθορίζει τον τρόπο μάθησης

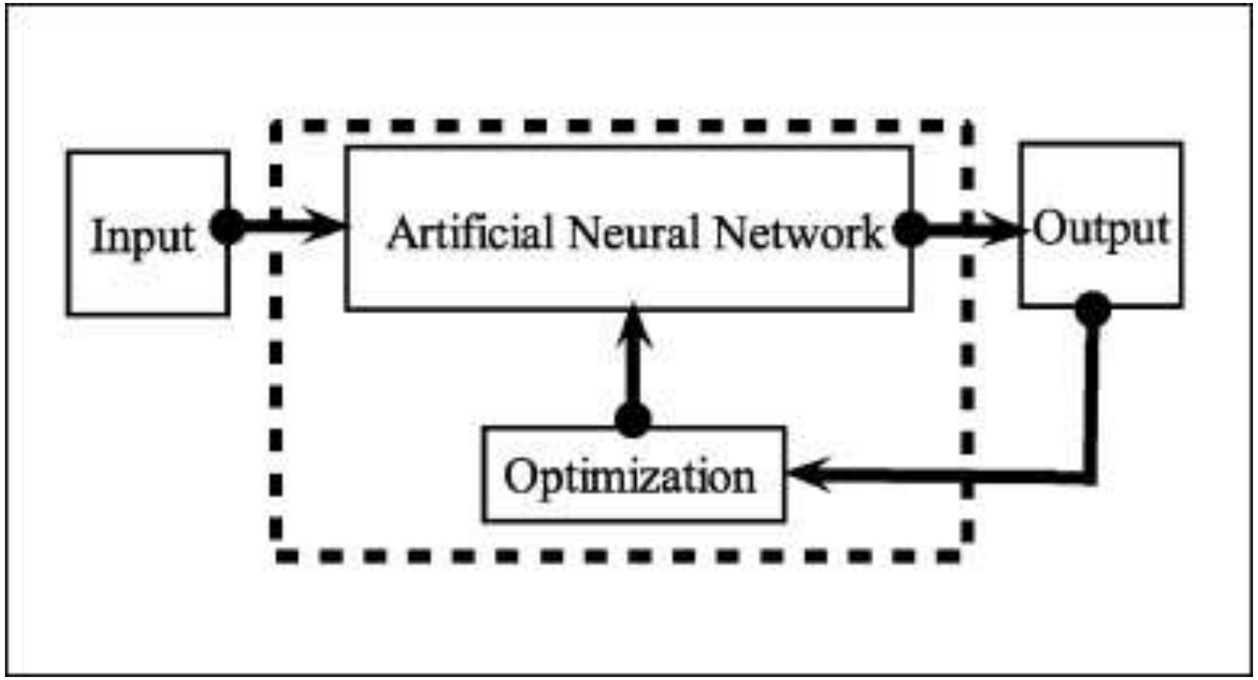
- Επιβλεπόμενη μάθηση (ενεργή)
- Ενισχυτική μάθηση
- Μη επιβλεπόμενη μάθηση (αυτοοργανούμενη)

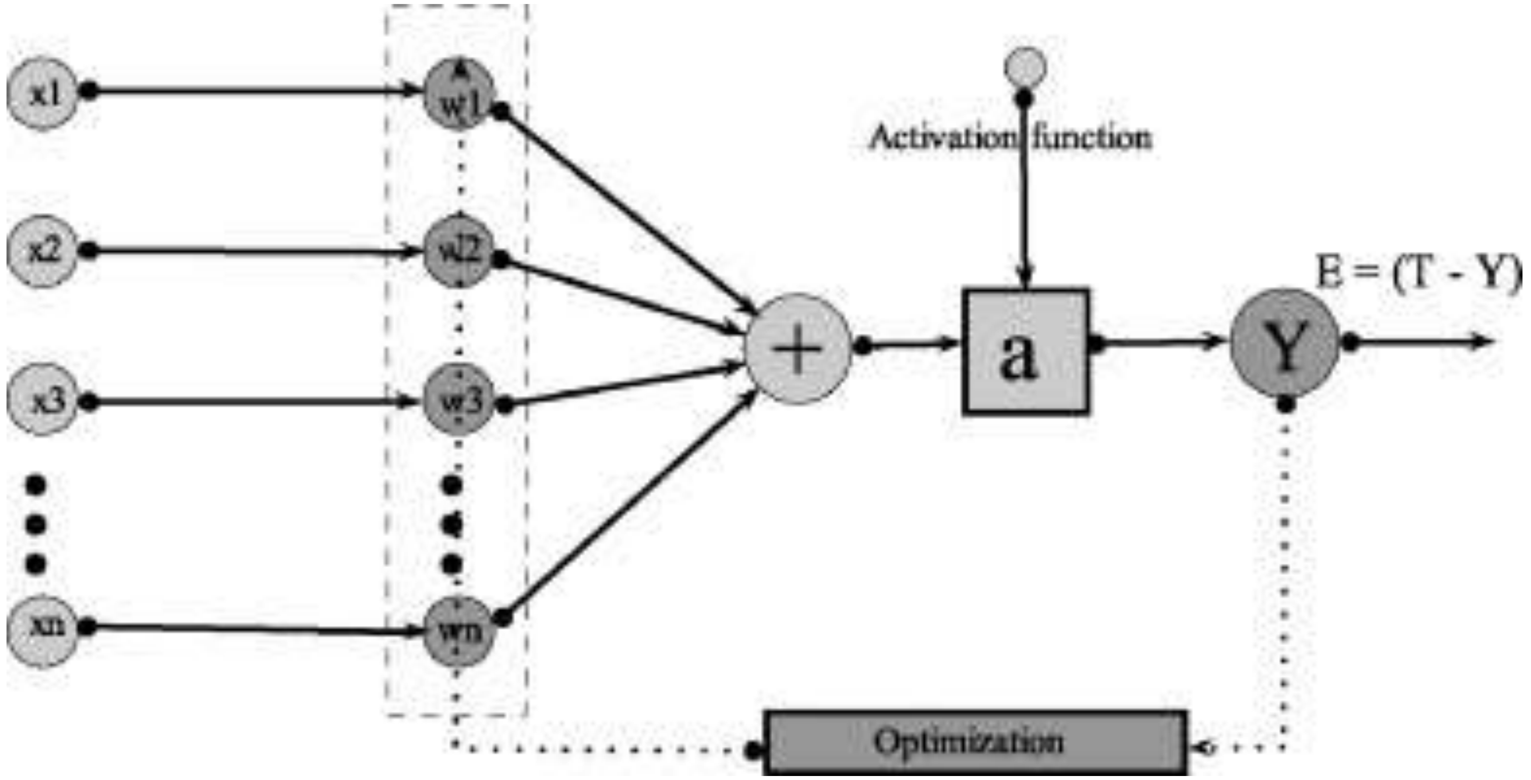
Βασικοί κανόνες μάθησης

- Μάθηση διόρθωση σφάλματος
- Μάθηση Hebb
- Ανταγωνιστική μάθηση
- Μάθηση Boltzmann

Πώς δουλεύουν τα ΤΝΔ;

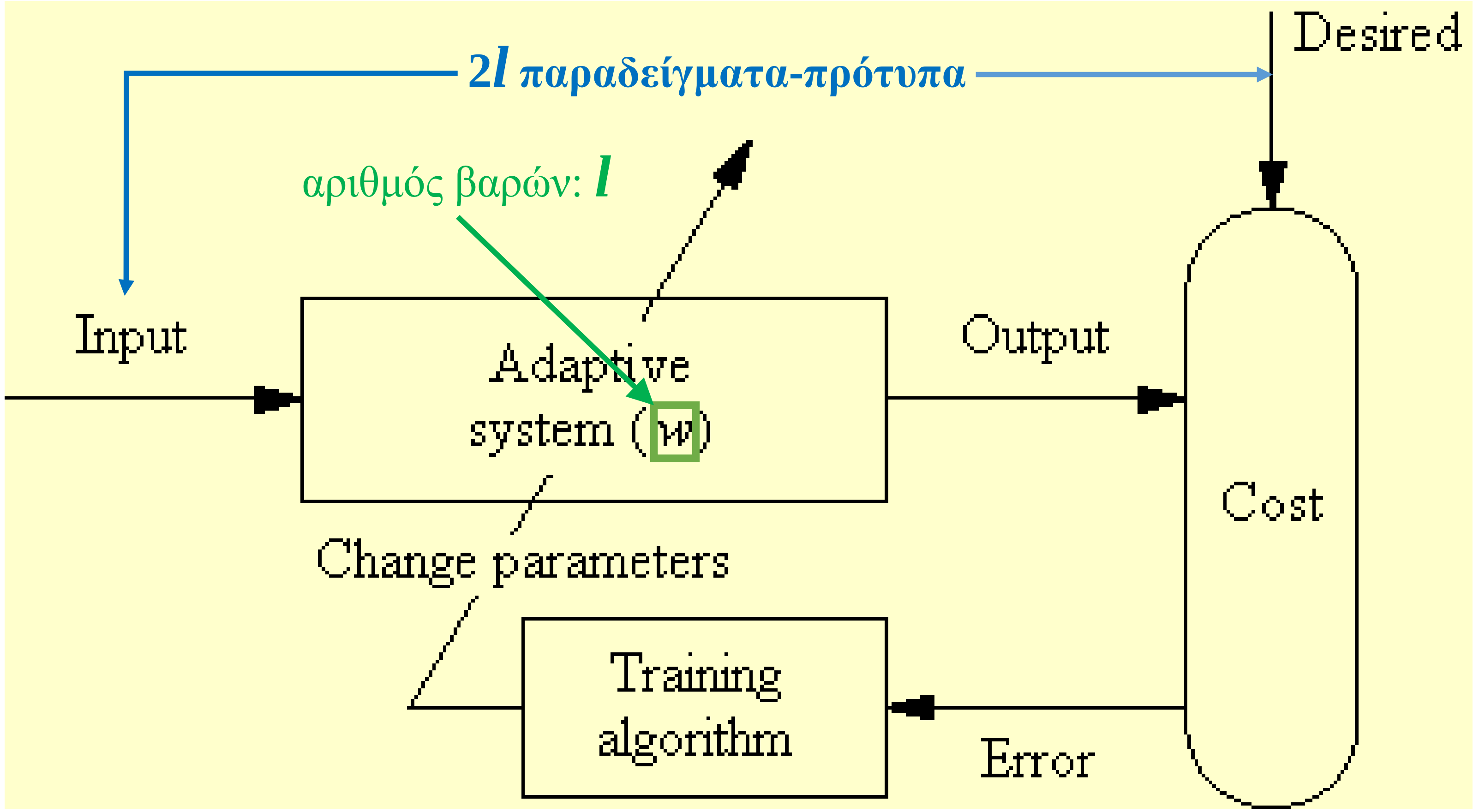
- Εκπαίδευση του δικτύου:
  1. Παρουσιάζονται τα δεδομένα στο δίκτυο
  2. Το δίκτυο υπολογίζει την έξοδο
  3. Η έξοδος του δικτύου συγκρίνεται με την επιθυμητή τιμή της εξόδου
  4. Τα βάρη του δικτύου τροποποιούνται για να μειώσουν το σφάλμα της εξόδου
- Χρήση του δικτύου:
  1. Παρουσιάζονται νέα δεδομένα στο δίκτυο
  2. Το εκπαιδευμένο δίκτυο υπολογίζει την έξοδο


Input
Artificial Neural Network
Output
Optimization



x1
x2
x3
xn
w1
w2
w3
wn
+
Activation function
a
Y
E = (T - Y)
Optimization

Ένα ΤΝΔ έχει ένα συνολικό αριθμό βαρών *l* τότε το ΤΝΔ μπορεί να εκπαιδευτεί και να μάθει μέχρι 2*l* παραδείγματα-πρότυπα



Μάθηση διόρθωσης σφάλματος για SLP

Ονόματα

- Κανόνας δέλτα (delta rule) για SLP ή
- Κανόνας ελαχιστοποίησης μέσου τετραγωνικού σφάλματος (LMS: Least Mean Squares) ή
- Κανόνας Widrow-Hoff ή
- Κανόνας ADALINE

Τεχνικές βελτιστοποίησης

- **Τεχνικές Βαθμίδας (Gradient techniques)**

Οι τεχνικές αυτές ρυθμίζουν μια παράμετρο W βασιζόμενες στην ευαισθησία

$\frac{\partial J}{\partial W}$ = μεταβολή της συνάρτησης κόστους πάνω στην μεταβολή της παραμέτρου.

Π.χ. Delta rule, back propagation, hill climbing

- **Ευρετικές τεχνικές τεχνητής νοημοσύνης**

Π.χ breadth first, depth first, A* algorithm

- **Εξελικτικές τεχνικές (Evolutionary techniques)**

Οι τεχνικές αυτές χρησιμοποιούν ένα πληθυσμό παραμέτρων για να εξελιχθεί μετά από πολλές γενιές και να παράξουν τη βέλτιστη λύση.

Π.χ Γενετικοί Αλγόριθμοι, Γενετικός προγραμματισμός, PSO

Η μέθοδος κατάβασης δυναμικού (gradient descent)

Σύμφωνα με τη μέθοδο κατάβασης δυναμικού η μεταβολή της παραμέτρου w ως προς το χρόνο t γίνεται χρησιμοποιώντας την παράγωγο της συνάρτησης κόστους j ως προς το w.

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{dj}{dw}$$

Επειδή στον υπολογιστή δεν είναι εφικτή η εξομοίωση του συνεχούς χρόνου t εκ των πραγμάτων χρησιμοποιούμε διακριτό χρόνο. Επομένως η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$dw = -dt \cdot \frac{dj}{dw} \rightarrow \Delta \mathrm{w} = w_{new} - w_{old} = -\eta \cdot \frac{dj}{dw} = -\eta \cdot g$$

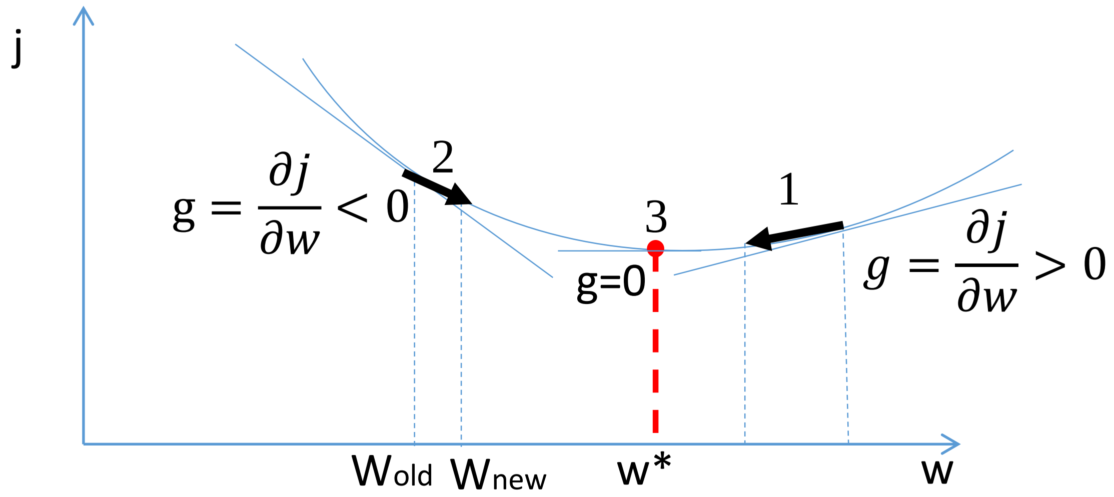
$dt \approx \eta$

$dw \approx \Delta \mathrm{w}$

g: κλίση

Η μέθοδος κατάβασης δυναμικού (gradient descent)

Το ζητούμενο είναι η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης κόστους j. Η ελάχιστη τιμή της j επιτυγχάνεται στην τιμή w*.



Η κίνηση προς τα κάτω γίνεται βρίσκοντας την κλίση g της συνάρτησης j στο σημείο όπου βρισκόμαστε. Έστω ότι βρισκόμαστε στο σημείο Wold. Ζητάμε να κινηθούμε προς την αντίθετη κατεύθυνση από αυτήν της παραγώγου της j ως προς το w (g).

1. Ένα βήμα πίσω (μείωση της τιμής του σημείου w), κίνηση προς τα κάτω, καθώς η βαθμίδα g είναι θετική.
2. Ένα βήμα μπροστά (αύξηση της τιμής του σημείου w), κίνηση προς τα κάτω, καθώς η βαθμίδα g είναι αρνητική.
3. Σταματά η αναζήτηση αν η βαθμίδα g είναι περίπου μηδέν, δηλαδή είναι κοντά στην οριζόντια γραμμή.

Περιγραφή της μεθόδου βελτιστοποίησης:

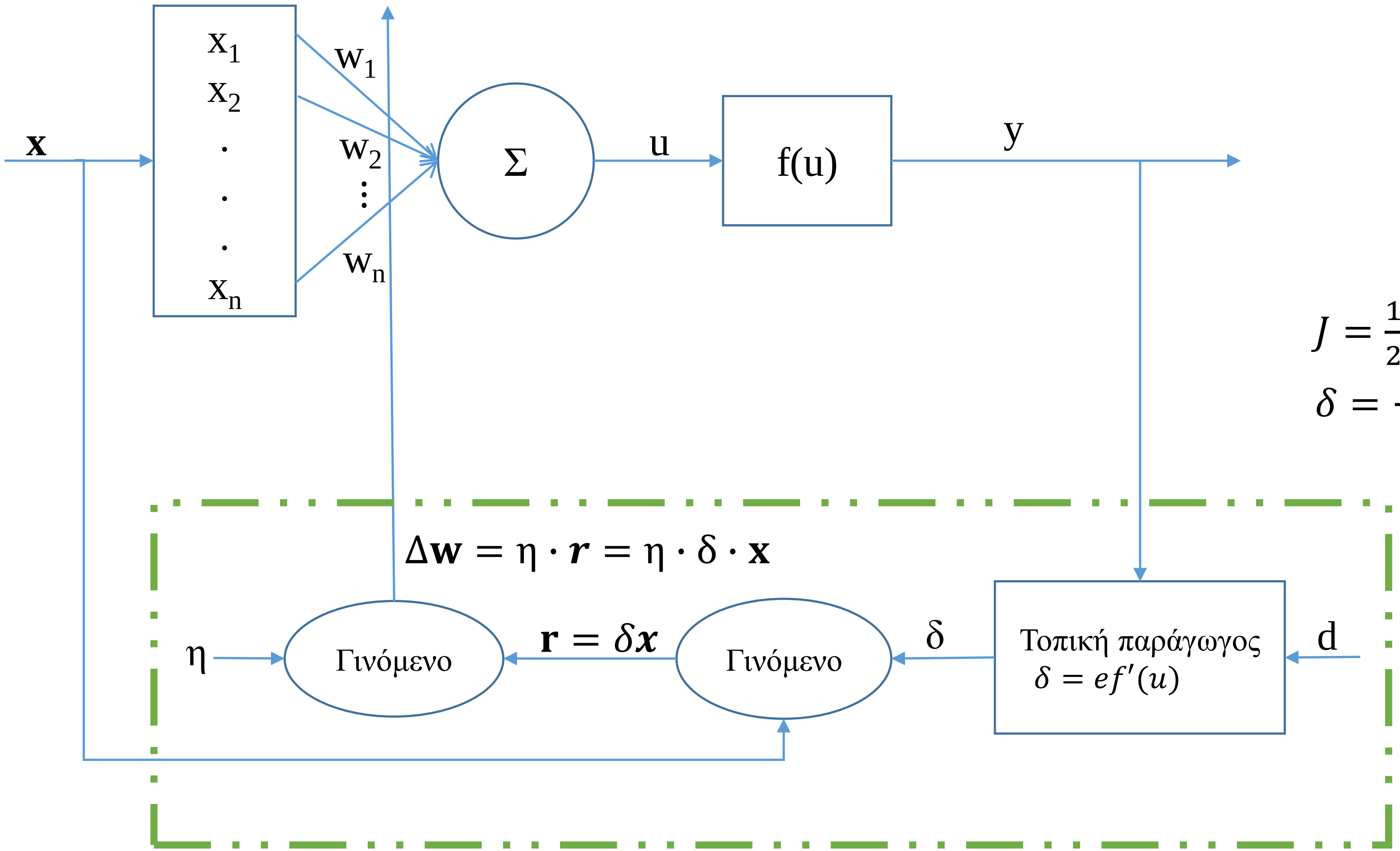
$$\Delta \mathrm{w} = -\eta \frac{\partial j}{\partial w}$$

$$w_{new} = w_{old} + \Delta \mathrm{w}$$

$$w_{new} = w_{old} - \eta \frac{\partial j}{\partial w}$$

η: βήμα εκπαίδευσης ή learning step ή learning rate

Κανόνας δ ρύθμισης συναπτικών βαρών



$$J = \frac{1}{2}(d-y)^2$$

$$\delta = -\frac{\partial J}{\partial u} = -\frac{\partial J}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = (d-y)f'(u) = ef'(u)$$

Κανόνας μάθησης δ

Κανόνας δ ρύθμισης συνοπτικών βαρών

u: δικτυακή διέγερση του νευρώνα.

δ: τοπική βαθμίδα ή παράγωγος του κόστους ως προς τη δικτυακή διέγερση του νευρώνα ή σφάλμα.

$$J = \frac{1}{2}(d-y)^2$$

$$\delta = -\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial u} = -\frac{\partial \mathrm{J}}{\partial y}\frac{\partial \mathrm{y}}{\partial u} = (d-y)f'(u) = ef'(u)$$

$\delta = ef'(u)$ για παραγωγίσιμη συνάρτηση ενεργοποίησης

$\delta = e$ για μη παραγωγίσιμη συνάρτηση ενεργοποίησης

Η παράγωγος της βηματικής συνάρτησης είναι η κρουστική συνάρτηση δ(t) ή συνάρτηση Dirac.

r: σήμα μάθησης $\left.\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= \delta \boldsymbol{x} \\ \Delta \boldsymbol{w} &= n\boldsymbol{r} \end{aligned}\right\} \rightarrow \Delta\mathbf{w} = \mathrm{n}\delta\mathbf{x}$

$$\begin{pmatrix} \text{Διόρθωση} \\ \text{βάρους} \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{μάθησης} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Τοπική} \\ \text{βαθμίδα} \\ \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Σήμα εισόδου} \\ \text{του νευρώνα} \\ x \end{pmatrix}$$

Κανόνας δ ή Perceptron για ένα νευρώνα με γραμμική συνάρτηση ενεργοποίησης f(u) = u

$$J(k) = \frac{1}{2} e^2(k)$$

$$\delta(\kappa) = e(k) = d - u(k)$$

$$u(k) = w_1(k)x_1 + w_2(k)x_2$$

$$\frac{\partial J(k)}{\partial \boldsymbol{w}} = \frac{\partial J(k)}{\partial e(k)} \frac{\partial e(k)}{\partial u(k)} \frac{\partial u(k)}{\partial \boldsymbol{w}} = e(k)(-1)\boldsymbol{x} = -e(k)\boldsymbol{x}$$

$$\Delta \boldsymbol{w}(k) = -n \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{w}} \rightarrow w(k+1) = w(k) + n\delta(k)\boldsymbol{x}$$

$$w_1(k+1) = w_1(k) + n\, e(k)x_1$$

$$w_2(k+1) = w_2(k) + n\, e(k)\, x_2$$

TABLE 3.1 Summary of the LMS Algorithm

Training Sample: Input signal vector $= \mathbf{x}(n)$

Desired response $= d(n)$

User-selected parameter: η

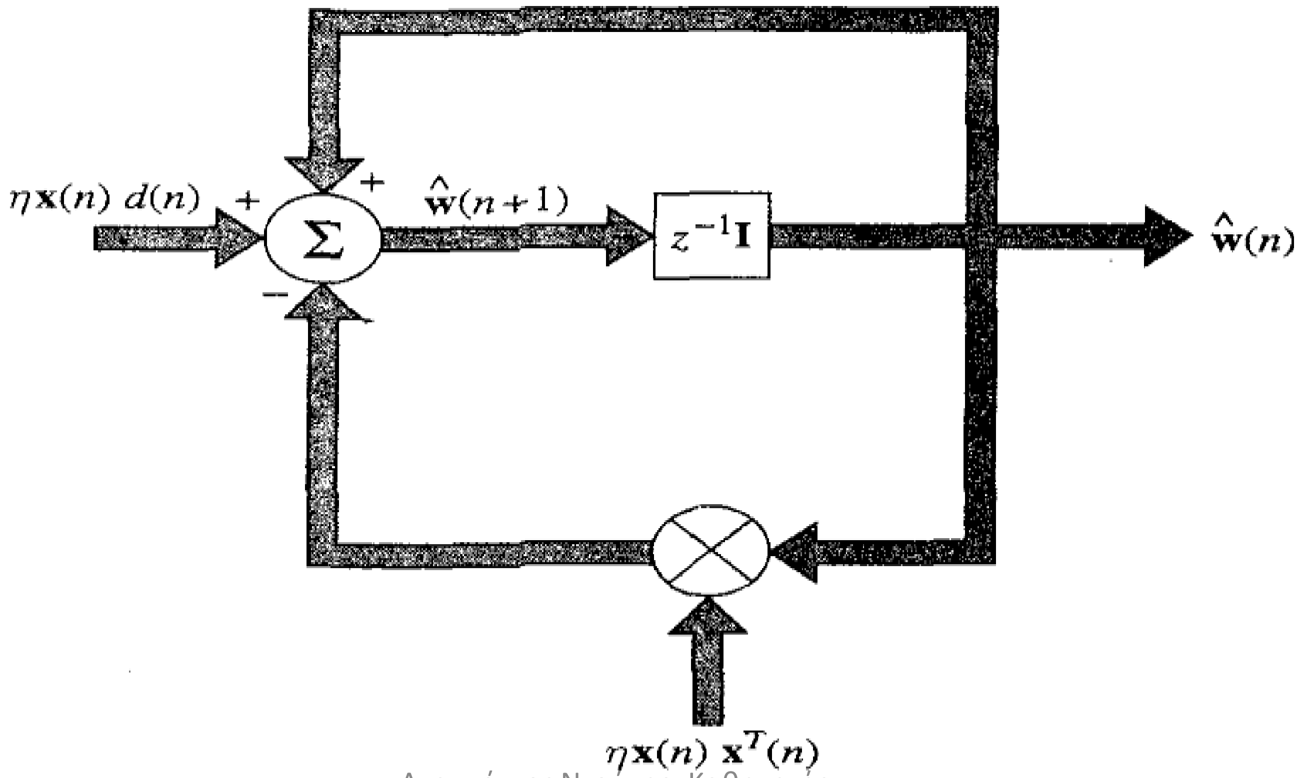
Initialization. Set $\hat{\mathbf{w}}(0) = \mathbf{0}$.

Computation. For $n = 1, 2, \ldots,$ compute

$$e(n) = d(n) - \hat{\mathbf{w}}^T(n)\mathbf{x}(n)$$

$$\hat{\mathbf{w}}(n+1) = \hat{\mathbf{w}}(n) + \eta\, \mathbf{x}(n)e(n)$$

$$\mathbf{x}^2(n) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}(n)\cdot\mathbf{x}(n)$$



Signal-flow
entation of the
m.

Κανόνας δ για ένα νευρώνα με σιγμοειδή συνάρτηση ενεργοποίησης

$$w(k+1) = w(k) - n\frac{\partial J}{\partial w}$$

$$w(k+1) = w(k) - n\frac{\partial J}{\partial e}\frac{\partial e}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w}$$

$$w(k+1) = w(k) - n \cdot \left[-(d-y)\frac{\partial y}{\partial u}x\right]$$

$$y = f(u) = \frac{1}{1+e^{-u}} \rightarrow \frac{\partial y}{\partial u} = f'(u) = f(u)\big(1-f(u)\big)$$

$$w(k+1) = w(k) + n(d-y)f'(u)x = w(k) + \eta \cdot e \cdot f'(u) \cdot x$$

$$b(k+1) = b(k) - n_1\frac{\partial J}{\partial b}$$

$$\mathrm{b}(k+1) = b(k) - n_1\frac{\partial J}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial b}$$

$$b(k+1) = b(k) + n_1(d-y)\frac{\partial y}{\partial u} \cdot 1 = b(k) + n_1 \cdot e \cdot f'(u)$$

Υπολογισμός του διανύσματος των βαρών με τα ελάχιστα τετράγωνα

Ελαχιστοποίηση της συνάρτησης J επιλέγοντας το κατάλληλο διάνυσμα των βαρών w με ελάχιστα τετράγωνα.

x: πίνακας των P προτύπων εισόδου

d: διάνυσμα των P στόχων εξόδου

w: διάνυσμα βαρών

xw=d: Σύστημα P γραμμικών εξισώσεων υπό μορφή πινάκων

Η λύση δίνεται από την εξίσωση

w*=x\d

Έστω ένα νευρώνας με τρείς εισόδους και μια έξοδο. Συνάρτηση ενεργοποίησης η γνωστή μοναδιαία συνάρτηση.

Λύση στο MATLAB

x=

1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0

d =

1
-1
-1
-1

w*=x\d=

-1.5000
1.0000
1.0000

Συναπτικά βάρη του νευρώνα: $w_0 = -1.5$, $w_1 = 1$, $w_2 = 1$

Υπολογισμός του διανύσματος των βαρών με διαφορικό λογισμό

Λύση του προηγούμενου προβλήματος με εργαλείο το διαφορικό λογισμό. J το μέσο τετραγωνικό σφάλμα ανά πρότυπο και $J_{ολ}$ το συνολικό σφάλμα για το σύνολο των προτύπων. Τα πρότυπα εισόδων-εξόδων,

$$(w_0, w_1, w_2)$$

$$x^1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix},\ d^1 = 1$$

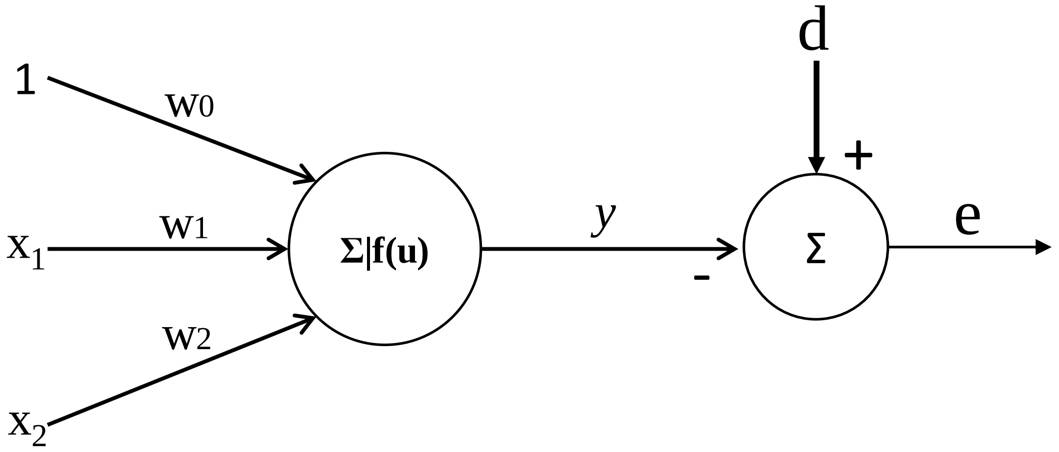
$$x^2 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\end{pmatrix}, d^2 = -1$$

$$x^3 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}, d^3 = -1$$

$$x^4 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}, d^3 = -1$$

4

Συνάρτηση ενεργοποίησης: $y = f(u) = u$



$$e^i = d^i - y_i = d^i - \left(w_0 + x_1^i \cdot w_1 + x_2^i \cdot w_2\right)$$

$$J_{o\lambda} = J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

$$= \frac{1}{2}\left(d^1 - (x_1^1 w_1 + x_2^1 w_2 + w_0)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(d^2 - (x_1^2 w_1 + x_2^2 w_2 + w_0)\right)^2 + \frac{1}{2}\left(d^3 - (x_1^3 w_1 + x_2^3 w_2 + w_0)\right)^2$$

$$+ \frac{1}{2}\left(d^4 - (x_1^4 w_1 + x_2^4 w_2 + w_0)\right)^2$$

$$\frac{\partial J_{o\lambda}}{\partial w_0} = 0 \to w_1 + w_2 + 2w_0 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial J_{o\lambda}}{\partial w_1} = 0 \to 2w_1 + w_2 + 2w_0 = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial J_{o\lambda}}{\partial w_2} = 0 \to w_1 + 2w_2 + 2w_0 = 0 \quad (3)$$

$$(3) - (1) \to w_1 = w_2 = 1$$

$$(1) \to w_0 = -\frac{3}{2}$$

Σύγκριση ελαχίστων τετραγώνων και δ κανόνα

Γιατί να χρησιμοποιήσουμε τον αναδρομικό κανόνα μάθησης δ και όχι με την απευθείας λύση στηριζόμενοι στη γραμμική άλγεβρα ή στο διαφορικό λογισμό;

Η απευθείας λύση είναι σαφώς ταχύτερη και δεν απαιτεί επανάληψη. Ο κανόνας μάθησης δ είναι νευρωνικός καθώς είναι επαναληπτικός αλλά είναι βραδύτερος της άμεσης λύσης.

Ένα βασικό πλεονέκτημα του κανόνα μάθησης δ σε σχέση με την απευθείας λύση βρίσκεται στην ικανότητα του να δέχεται μια ασταμάτητη ροή δεδομένων χωρίς να υπάρχει επανάληψη προτύπων. Τα πρότυπα προφανώς αυξάνουν συνεχώς. Για να εφαρμόσουμε την απευθείας λύση θα έπρεπε να περιμένουμε στο διηνεκές. Αντίθετα με το κανόνα δ, μετά από κάποιες επαναλήψεις τα βάρη ουσιαστικά συγκλίνουν κοντά στη λύση.

Ερωτήσεις

1. Ο κανόνας δέλτα δίνει την ποσότητα δ ως:
(α) δ = σταθερά*(στόχος – έξοδος)*στόχος
(β) δ = σταθερά*(στόχος – έξοδος)*σήμα_εξόδου
(γ) δ = σταθερά*(στόχος – έξοδος)*σήμα_εισόδου
(α) δ = στόχος – έξοδος
(ε) κανένα από τα παραπάνω

2. Γιατί δεν εφαρμόζεται ο κανόνας δέλτα εκεί όπου το πρόβλημα δεν έχει στόχο;

Δεν μπορεί να εφαρμοσθεί ο κανόνας δέλτα διότι ο κανόνας αυτός για να υπολογίσει την ποσότητα $\delta = nex$ χρειάζεται την ποσότητα e, η οποία είναι e = d-y. Εδώ d είναι ο στόχος και αφού στα ενδιάμεσα επίπεδα ενός ΤΝΔ δεν υπάρχει στόχος, άρα δεν μπορούν να υπολογισθούν οι ποσότητες e και δ. Για τον λόγο αυτό πρέπει να επινοηθεί μία άλλη διαδικασία που να επιφέρει την αλλαγή στα *w*, υπολογίζοντας βέβαια την ποσότητα δ. Αυτή ακριβώς η διαδικασία περιγράφεται στις επόμενες διαφάνειες. Πρέπει όμως να καταλάβουμε τον λόγο που δεν υπάρχουν οι τιμές του στόχου στα κρυμμένα επίπεδα.

Άσκηση

Θέλουμε να εκπαιδεύσουμε ένα νευρώνα χρησιμοποιώντας τα παρακάτω πρότυπα εισόδου-εξόδου.

$\boldsymbol{x}_1 = [1, -2, 0, -1]^T, d^{(1)} = -1$
$\boldsymbol{x}_2 = [0, 1.5, -0.5, -1]^T, d^{(2)} = -1$
$\boldsymbol{x}_3 = [-1, 1, 0.5, -1]^T, d^{(3)} = +1$

Αρχικά συναπτικά βάρη: $w^{(0)} = [1, -1, 0, 0.5]^T$. Ρυθμός μάθησης η = 0.1. Συνάρτηση ενεργοποίησης η βηματική -1/+1.

Να βρεθεί το τελικό διάνυσμα των βαρών μετά από τέσσερις εποχές.

1^{η} Επανάληψη (1^{η} Εποχή)

Εισάγοντας την πρώτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(1)} = sgn\left([1, -1, 0, 0.5\,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = +1$$

Ενημέρωση βαρών με τη μέθοδο της διόρθωσης του σφάλματος: $w^{new} = w^{old} + \eta \cdot \delta^{(1)} \cdot \boldsymbol{x}_1^T$

όπου δ η τοπική βαθμίδα: $\delta^{(1)} = e^{(1)} \cdot f'(u) = \left(d - y^{(1)}\right) \cdot 1 = -2$

$$w^{(1)} = ([1, -1, 0, 0.5\,] + (-0.2) \cdot [1, -2, 0, -1\,]) = [0.8, -0.6, 0, 0.7\,]$$

Εισάγοντας τη δεύτερη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(2)} = f\left([0.8, -0.6, 0, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -1 = d^{(2)}$$

Τότε

$$w^{(3)} = w^{(2)}$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(d^{(2)} - y^{(2)}\right)^2 = 0$$

Εισάγοντας την τρίτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(3)} = f\left([0.8, -0.6, 0, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = -1 \neq d^{(3)}$$

Τότε

$$w^{(4)} = w^{(3)} + \eta \cdot \left(d^{(3)} - y^{(3)}\right) = [0.6, -0.4,0.1,0.5]$$

$$J_3 = \frac{1}{2} \cdot \left(d^{(3)} - y^{(3)}\right)^2 = 2$$

$2^{η}$ Επανάληψη ($2^{η}$ Εποχή)

Εισάγοντας την πρώτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(4)} = f\left([0.6, -0.4, 0.1, 0.5\,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = +1 \neq d^{(1)}$$

$$w^{(5)} = w^{(4)} + \eta \cdot \left(d^{(1)} - y^{(4)}\right) = [0.4,0,0.1,0.7]$$

Εισάγοντας τη δεύτερη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(5)} = f\left([0.4,0, 0.1, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 = d^{(2)}$$

$$w^{(6)} = w^{(5)}$$

Εισάγοντας την τρίτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(6)} = f\left([0.4,0, 0.1, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 \neq d^{(3)}$$

$$w^{(7)} = w^{(6)} + \mathrm{η} \cdot \left(d^{(3)} - y^{(6)}\right) = [0.2,0.2,0.2,0.5]$$

3^{η} Επανάληψη (3^{η} Εποχή)

Εισάγοντας την πρώτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(7)} = f\left([0.2,0.2, 0.2, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 = d^{(1)}$$

$$w^{(8)} = w^{(7)}$$

Εισάγοντας τη δεύτερη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(8)} = f\left([0.2,0.2, 0.2, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 = d^{(2)}$$

$$w^{(9)} = w^{(8)}$$

Εισάγοντας την τρίτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(9)} = f\left([0.2,0.2\ 0.2, 0.7\,] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 \neq d^{(3)}$$

$$w^{(10)} = w^{(9)} + \eta \cdot \left(d^{(3)} - y^{(9)}\right) = [0,0.4,0.3,0.3]$$

4^{η} Επανάληψη (4^{η} Εποχή)

Εισάγοντας την πρώτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(10)} = f\left([0,0.4, 0.3, 0.3\,] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 = d^{(1)}$$

$$w^{(11)} = w^{(10)}$$

Εισάγοντας τη δεύτερη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(11)} = f\left([0,0.4, 0.3, 0.3\,] \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1.5 \\ -0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = +1 \neq d^{(2)}$$

$$w^{(12)} = w^{(8)} + \eta \cdot \left(d^{(2)} - y^{(11)}\right) = [0,0.1,0.4,0.5]$$

Εισάγοντας την τρίτη είσοδο στο νευρώνα παίρνουμε:

$$y^{(12)} = f\left([0,0.1\ 0.4, 0.5\,] \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0.5 \\ -1 \end{bmatrix} \right) = -1 \neq d^{(3)}$$

$$w^{(13)} = w^{(12)} + \eta \cdot \left(d^{(3)} - y^{(12)}\right) = [-0.2,0.3,0.5,0.3]$$

Εισάγοντας τα πρότυπα για 5η εποχή τα αποτελέσματα στα συναπτικά βάρη δεν αλλάζουν, που σημαίνει ότι το διάνυσμα $w^{(13)}$ είναι η λύση του προβλήματος ήτοι:

$$w_1 = -0.2, w_2 = 0.3, w_3 = 0.5, w_4 = 0.3$$

Εφαρμογή του κανόνα δ για εκπαίδευση δικτύων RBF

Η σχέση εισόδου-εξόδου ενός βασιζόμενου σε Γκαουσιανές συναρτήσεις δικτύου RBF, με δύο εσωτερικούς νευρώνες ορίζεται ως

$$y = w_1 \cdot R_1(x) + w_2 \cdot R_2(x)$$

Η συνάρτηση κόστους J που χρησιμοποιείται για την εκπαίδευση του δικτύου ορίζεται ως

$$J = \frac{1}{2} \cdot e^2$$

$$\text{όπου } e = d - y$$

α) Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης κόστους ως προς κάθε μια από τις παραμέτρους του δικτύου w_i, σ, c_i, για όλα τα i.

β) Χρησιμοποιήστε τις κλίσεις που υπολογίσατε στο ερώτημα α) και τον κανόνα μάθησης δ για να διατυπώσετε τους τύπους ενημέρωσης για όλες τις παραμέτρους του δικτύου με ρυθμό μάθησης η η κάθε μια παράμετρος.

$$\left.\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \cdot e^2 \\ e &= d - y \\ y &= w_1 \cdot R_1(x) + w_2 \cdot R_2(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial J}{\partial w_i} = \frac{\partial J}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial w_i} = e \cdot (-1) \cdot R_i$$

$$w_{i,new} = w_{i,old} + \eta \cdot e \cdot R_i$$

$$\frac{\partial J}{\partial \sigma} = \frac{\partial J}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial R_i} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial \sigma} = e \cdot (-1) \cdot w_i \cdot R_i \cdot \left[\frac{2 \cdot (x - c_i)^2}{\sigma^3}\right]$$

$$\sigma_{new} = \sigma_{old} + \eta \cdot e \cdot w_i \cdot R_i \cdot \left[\frac{2 \cdot (x - c_i)^2}{\sigma_{old}^3}\right]$$

$$\frac{\partial J}{\partial c_i} = \frac{\partial J}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial R_i} \cdot \frac{\partial R_i}{\partial c_i} = e \cdot (-1) \cdot w_i \cdot R_i \cdot \left[\frac{2 \cdot (x - c_i)}{\sigma^2}\right]$$

$$c_{i,new} = c_{i,old} - \eta \cdot e \cdot w_i \cdot R_i \cdot \left[\frac{2 \cdot \left(x - c_{i,old}\right)}{\sigma^2}\right]$$

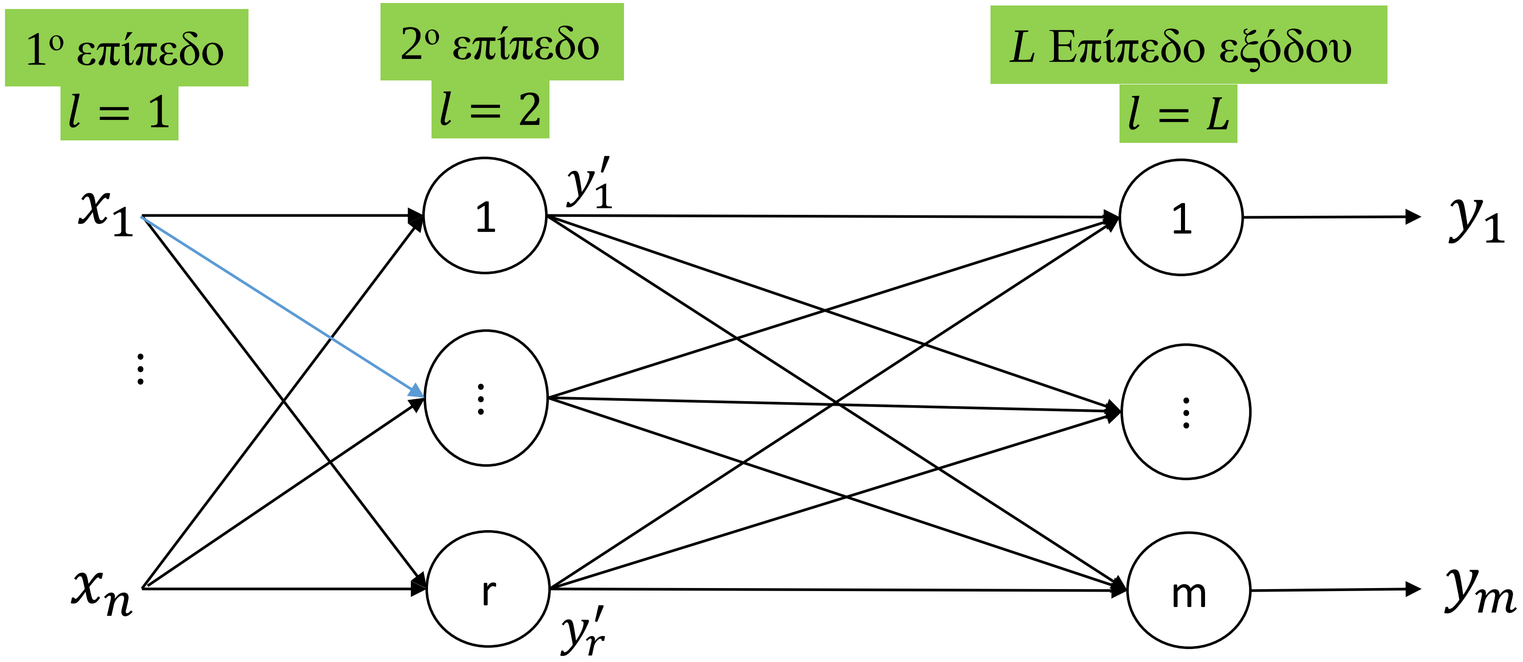
Αλγόριθμος οπισθοδιάδοσης του σφάλματος - Back Propagation (επέκταση του κανόνα δ για MLP)

Μαθηματικός τύπος πολυστρωματικού ΤΝΔ

Διάνυσμα εισόδου: $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ $\quad j = 1, \dots, n$

Έξοδος κρυφού επιπέδου: $\boldsymbol{y}' = (y'_1, y'_2, \dots, y'_r)^T$ $\quad i = 1, \dots, r$

Έξοδος ΤΝΔ: $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$ $\quad k = 1, \dots m$



$$y_k = f\left(\sum_{i=1}^{r} w'_{ki} \cdot y'_i - b_k\right)$$

$$y'_i = f\left(\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \cdot x_j - b'_i\right)$$

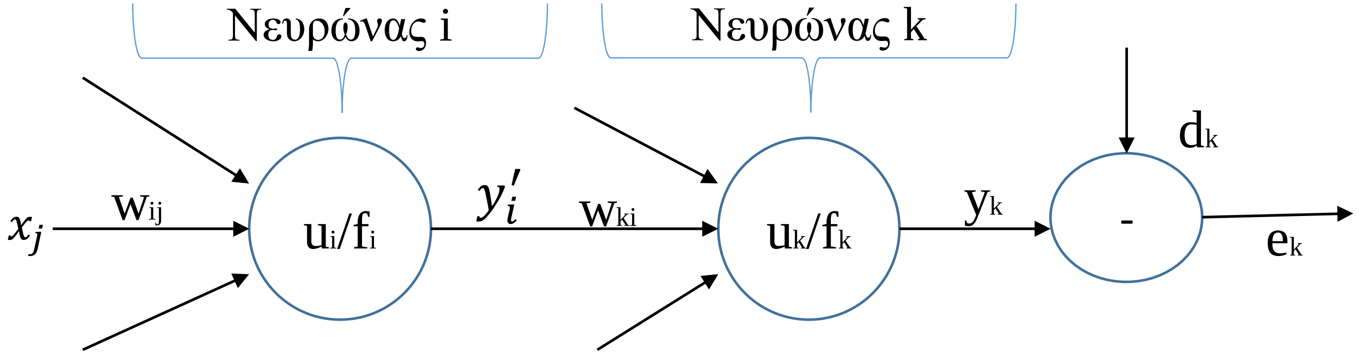
Καθορισμός της τοπικής βαθμίδας σφάλματος δ σε νευρώνα του κρυφού επιπέδου

Έστω ένα πολυστρωματικό ΤΝΔ. Ο νευρώνας *i* ανήκει σε κρυφό επίπεδο και ο νευρώνας *k* ανήκει στο επίπεδο εξόδου.

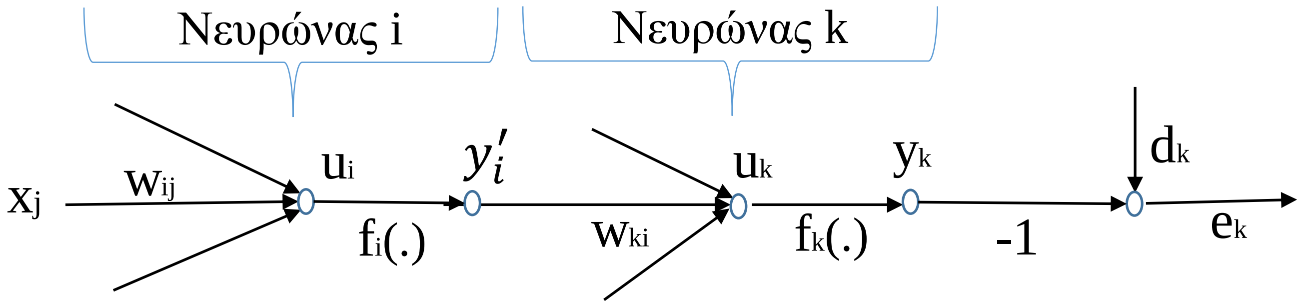
l = 1: επίπεδο εισόδων

l = 2: κρυφό επίπεδο

l = L: επίπεδο εξόδου



Το γράφημα ροής σήματος του πολυστρωματικού ΤΝΔ είναι το παρακάτω:



Το σήμα σφάλματος για ένα κρυφό νευρώνα καθορίζεται αναδρομικά με οπισθοδιάδοση βάσει των σφαλμάτων όλων των νευρώνων επιπέδου $l+1$ με τους οποίους συνδέεται άμεσα ο κρυφός νευρώνας. Η τοπική βαθμίδα σφάλματος δ του κόμβου i υπολογίζεται ως εξής:

$$\delta_i(l) = -\frac{\partial J}{\partial u_i} = -\frac{\partial J}{\partial y_i} \cdot \frac{\partial y_i}{\partial u_i} = -\frac{\partial J}{\partial y_i} \, f_i^{'}(u_i)$$

Η συνάρτηση κόστους ορίζεται ως εξής:

$$J=\frac{1}{2}\sum_k e_k^2 \rightarrow \frac{\partial J}{\partial y_i}=\sum_k e_k\cdot\frac{\partial e_k}{\partial y_i}=\sum_k e_k\cdot\frac{\partial e_k}{\partial u_k}\cdot\frac{\partial u_k}{\partial y_i}\ (*)$$

Υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους που εμφανίζονται στο άθροισμα μετά την εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας.

$$\left.\begin{array}{l} e_k=d_k-y_k=d_k-f(u_k)\rightarrow \dfrac{\partial e_k}{\partial u_k}=-f_k^{'}(u_k) \\ u_k=\displaystyle\sum_{i=0}^{m} w_{ki}y_i \rightarrow \dfrac{\partial u_k}{\partial y_i}=w_{ki} \end{array}\right\}\rightarrow$$

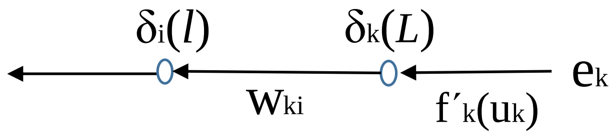
$$\xrightarrow{(*)}\frac{\partial J}{\partial y_i}=-\sum_k e_k\cdot f_k^{'}(u_k)\cdot w_{ki}\ (**)$$

Η τοπική βαθμίδα σφάλματος δ του κόμβου i είναι:

$$\delta_i(l) = -\frac{\partial J}{\partial y_i} \cdot f_i^{'}(u_i) \xrightarrow{(**)} \delta_i(l) = f_i^{'}(u_i) \cdot \sum_k \underbrace{e_k \cdot f_k^{'}(u_k)}_{\delta_k(L)} \cdot w_{ki}$$

$$\delta_i(l) = f_i^{'}(u_i) \cdot \sum_k \delta_k(L) \cdot w_{ki}$$

Γράφημα ροής σήματος που εκτελεί την οπισθοδιάδοση του σφάλματος



Βασικές εξισώσεις της μεθόδου οπισθοδιάδοσης BP

Η διόρθωση που εφαρμόζεται στα συναπτικά βάρη ορίζεται από τον κανόνα δέλτα:

$$\begin{pmatrix} \text{Διόρθωση} \\ \text{βάρους} \\ \Delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{μάθησης} \\ \eta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Τοπική} \\ \text{βαθμίδα} \\ \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \text{Σήμα εισόδου} \\ \text{του νευρώνα} \\ y \text{ ή } x \end{pmatrix}$$

Α. Τύποι υπολογισμού της τοπικής βαθμίδας δ

1. Εάν ο νευρώνας k είναι κόμβος εξόδου

$$\delta_k(L) = (d_k - y_k) \cdot f'(u_k) = e_k \cdot f'(u_k) \qquad (1)$$

2. Εάν ο νευρώνας i είναι ένας κόμβος του κρυφού στρώματος l

$$\delta_i(l) = f'(u_i) \cdot \sum_k \delta_k(L) \cdot w_{ki} \qquad (2)$$

Β. Τύποι ενημέρωσης των βαρών

1. Για συναπτικά βάρη μεταξύ εξόδου και κρυφού επιπέδου

$$\Delta w_{ki}(L) = n \cdot \delta_k(L) \cdot y_i' \qquad (3)$$

2. Για συναπτικά βάρη μεταξύ κρυφού επιπέδου και εισόδου

$$\Delta w'_{ij}(l) = n \cdot \delta_i(l) \cdot x_j \qquad (4)$$

j : αριθμός εισόδου, i : αριθμός κρυφού κόμβου

k : αριθμός κόμβου εξόδου, l: αριθμός στρώματος

$l = 1, \dots, L$
$k = 1, \dots m$
$j = 1, \dots, n$
$i = 1, \dots, r$

Επισημάνσεις

1. Η εξίσωση (3) έδωσε το όνομα Back-Propagation στην όλη μέθοδο. Από τον τύπο φαίνεται ότι η τοπική βαθμίδα ή σφάλμα δ σε οποιονδήποτε νευρώνα του κρυφού στρώματος είναι συνάρτηση των σταθμισμένων τοπικών βαθμίδων (σφαλμάτων) του στρώματος της εξόδου (για ΤΝΔ με ένα κρυφό στρώμα και τουλάχιστον δυο εξόδους). Το ίδιο ισχύει και για περισσότερα στρώματα.

2. Τα σφάλματα μοιάζουν να πηγάζουν από το τελευταίο στρώμα και να προωθούνται προς τα πίσω, δηλαδή μέχρι το πρώτο στρώμα. Τα σφάλματα που προωθούνται προς τα πίσω χρησιμοποιούν τα ίδια βάρη του δικτύου που χρησιμοποιούνται και στην ανάκληση.

3. Αρίθμηση στρωμάτων $l = 1,\ldots,L$

$L = 1$: στρώμα εισόδου, $l = L$: στρώμα εξόδου

Κριτήρια τερματισμού του αλγόριθμου BP

- Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο κριτήριο τερματισμού του αλγόριθμου BP είναι η αξιολόγηση του κόστους ***J***. Για να υπολογίσουμε το *J(n)* κρατάμε σταθερά τα βάρη, που προέκυψαν από την *n* εποχή και τροφοδοτούμε το δίκτυο με όλα τα πρότυπα υπολογίζοντας το σφάλμα

$$e(p) = \left\| \mathbf{d}^{(p)} - \mathbf{y}^{(p)} \right\|^2$$

για κάθε πρότυπο p.

Στη συνέχεια αθροίζουμε όλα αυτά τα σφάλματα και το άθροισμά τους είναι το ζητούμενο κόστος

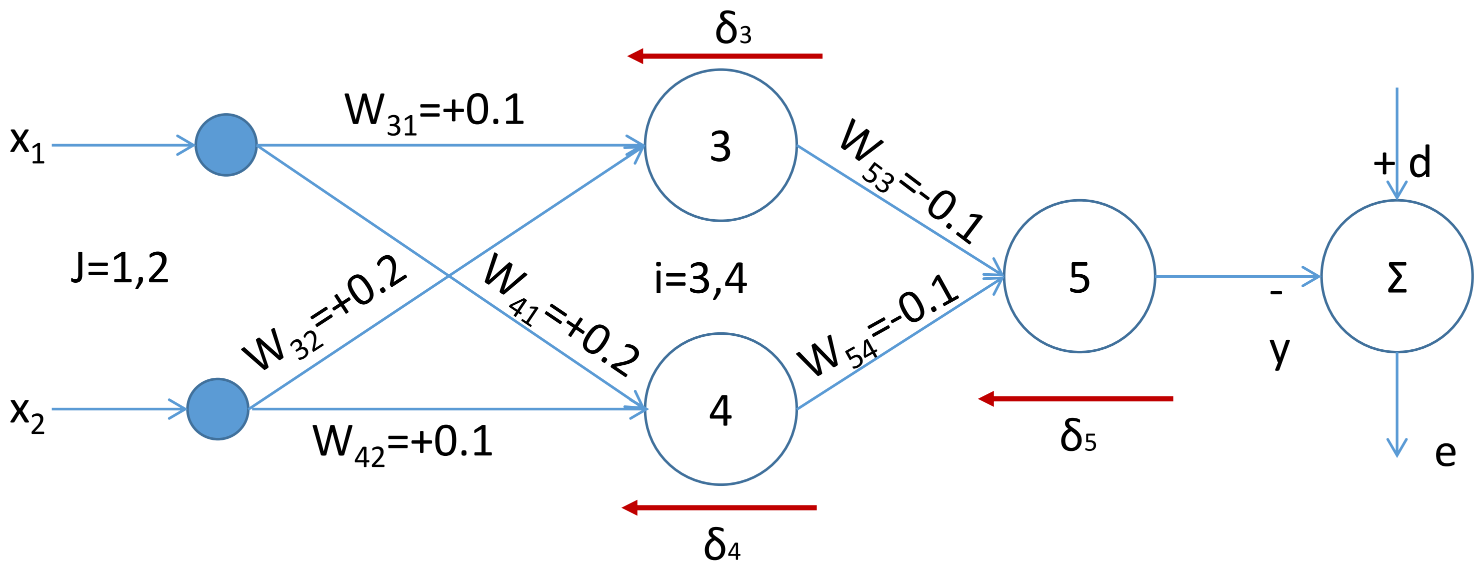
$$J(n) = e(1) + \ldots + e(p)$$

Το κόστος *J(n)* είναι ικανοποιητικό εάν για την εποχή εκπαίδευσης *n* είναι μικρότερο από ένα κατώφλι ε που ορίζει ο χρήστης.

- Εναλλακτικό κριτήριο τερματισμού είναι η αξιοποίηση των συναπτικών βαρών. Κατά την *n* εποχή αθροίζουμε τις απόλυτες τιμές των μεταβολών των βαρών και τις συγκρίνουμε με ένα κατώφλι ε που ορίζει ο χρήστης.

$$\sum_{i,j} \left| \Delta w_{ij} \right| < \varepsilon$$

Εφαρμογή του αλγόριθμου BP -1



j: είσοδοι
i: νευρώνες εσωτερικού στρώματος
k: νευρώνες εξόδου

$$\text{Δεδομένα}: \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$

Φάση ανάκλησης

Εμπρός πέρασμα:

Κόμβος 3:

$$u_3 = 0 * 0.1 + 1 * \ 0.2 = 0.2$$

$$y_3 = f(u_3) = \frac{1}{1+e^{-0.2}} = 0.550$$

Κόμβος 4:

$$u_4 = 0 * \ 0.2 + 1 * \ 0.1 = 0.1$$

$$y_4 = f(u_4) = \frac{1}{1+e^{-0,1}} = 0.525$$

Κόμβος 5:

$$\Rightarrow$$

$$u_5 = 0.550\ (-0.1) + 0.525(-0.1) = -0.108$$

$$y_5 = f(u_5) = \frac{1}{1+e^{0.108}} = 0.473$$

Υπολογισμός σφάλματος στην έξοδο του ΝΔ

$$\boldsymbol{e = d - y_5 = 1 - 0.473 = 0.52}$$

Εφαρμογή του αλγόριθμου BP-2

Πίσω πέρασμα

(φάση υπολογισμού του δ)

Υπολογίζουμε το δ για όλους τους υπολογιστικούς νευρώνες

$$\delta_5 = ef'(u_5) = ef(u_5)(1 - f(u_5)) \Rightarrow \delta_5 = 0.525 \cdot 0.473 \cdot (1 - 0.473) = 0.131$$

Υπολογίζουμε τα τοπικά σφάλματα δ για τους 2 νευρώνες του κρυφού επιπέδου:

$$\delta_3 = f'(u_3)\delta_5 w_{53} = f(u_3)(1 - f(u_3)\delta_5 w_{53} = 0.55(1 - 0.55)0.131(-0.1) = -0.003$$

$$\delta_4 = f'(u_4)\delta_5 w_{54} = f(u_4)(1 - f(u_4)\delta_5 w_{54} = -0.003$$

Εφαρμογή του αλγόριθμου BP-3

Υπολογισμός των διορθώσεων στα βάρη του ΤΝΔ

$$\Delta w_{53} = n\delta_5 y_3 = 1\ 0.131\ 0.55 = 0.072$$

$$w_{53\_new} = w_{53\_old} + 0.072 = -0.1 + 0.072 = -0.028$$

$$\Delta w_{54} = n\delta_5 y_4$$

$$w_{54\_new} = w_{54\_old} + n\delta_5 y_4 = -0.031$$

$$\Delta w_{13} = n\delta_3 x_1 \Rightarrow w_{31\_new} = w_{31\_old} + n\delta_3 x_1 = 0.1 + 0.1(-0.003)0 = 0.1$$

$$w_{32\_new} = w_{32\_old} + n\delta_3 x_2 = 0.2 + 0.1(-0.003)1 = 0.197$$

$$w_{41\_new} = w_{41\_old} + n\delta_4 x_1 = 0.2 + 0.1(-0.003)0 = 0.2$$

$$w_{42\_new} = w_{42\_old} + n\delta_4 x_2 = 0.1 + 0.1(-0.003)1 = 0.097$$

Εφαρμογή του αλγόριθμου BP- 4

Υπολογισμός της νέας εξόδου του δικτύου

Κόμβος 3:

$u_3 = 0.1\ 0 + 0.197\ 1 = 0.197$

$y_3 = f(u_3) = 0.549$

Κόμβος 4:

$u_4 = 0.2\ 0 + 0.097\ 1 = 0.097$

$y_4 = f(u_4) = 0.524$

Κόμβος 5:

$u_5 = -0.028\ 0.549 - 0.031\ 0.524 = -0.031$

$y_5 = f(u_5) = 0.492$

Σφάλμα: $\mathrm{e1} = 1 - 0.492 = 0.508$

Ερώτηση

Η μέθοδος της οπισθοδιάδοσης έχει μειονεκτήματα γιατί:

(α) ο χρόνος εκπαίδευσης μπορεί να είναι υπερβολικά μεγάλος

(β) το δίκτυο μπορεί να πέσει σε τοπικά ελάχιστα και να μην μπορεί να απεγκλωβισθεί

(γ) το μέγεθος του βήματος πρέπει να επιλεγεί προσεκτικά

(δ) αν τα πρότυπα που παρουσιάζονται αλλάζουν, το δίκτυο δεν εκπαιδεύεται

(ε) όλα τα παραπάνω

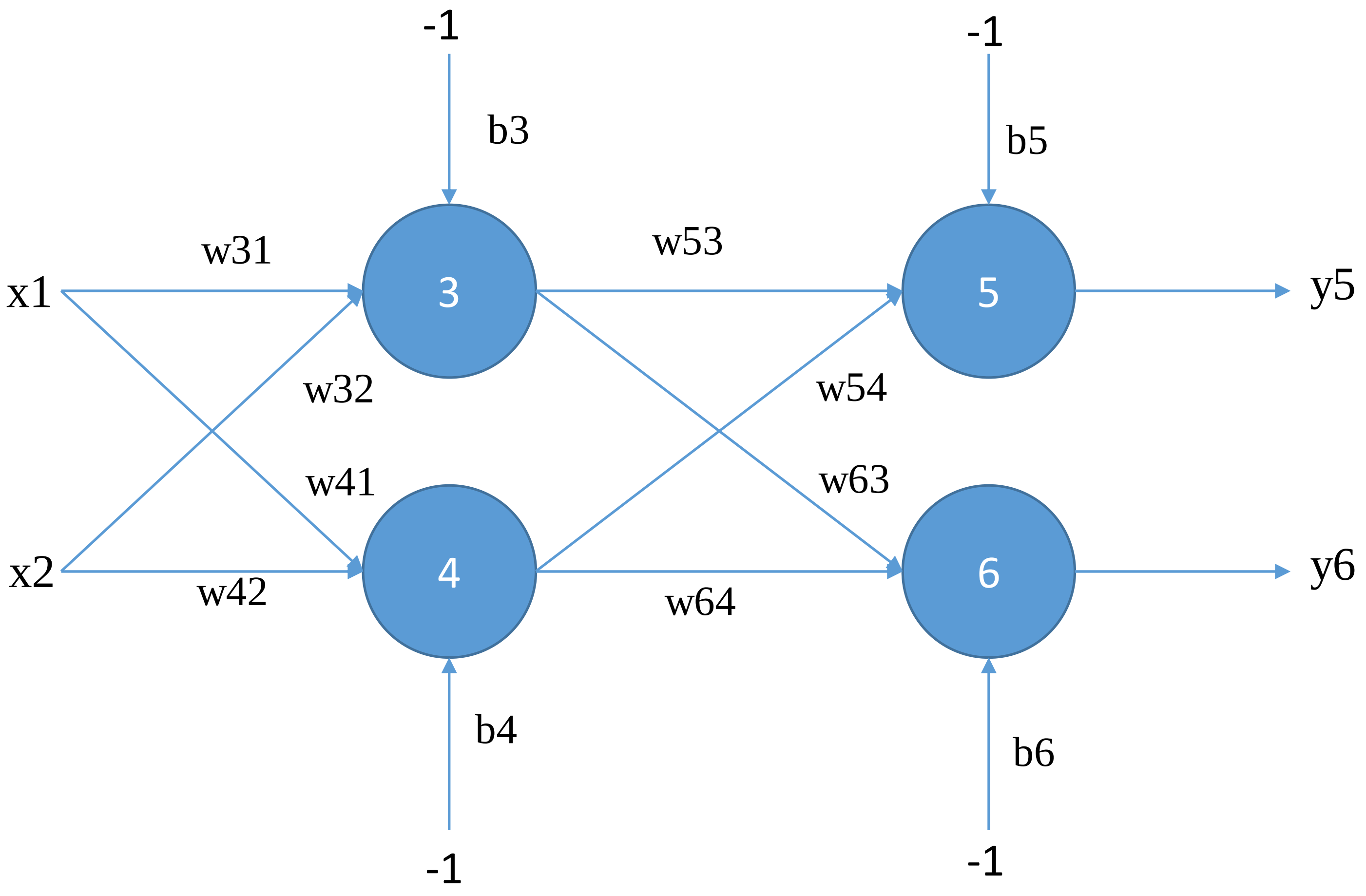
Απάντηση

Η ερώτηση αυτή μπορεί να θεωρηθεί λίγο παραπλανητική. Η σωστή απάντηση είναι το (ε), γιατί όλα τα σημεία που αναφέρονται στα (α)–(δ) είναι σωστά. Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό. Ο αριθμός των κύκλων που είναι απαραίτητος για την εκπαίδευση του δικτύου ποικίλλει από 800–80000, άρα μπορεί πραγματικά να είναι μεγάλος ο χρόνος της εκπαίδευσης. Το δίκτυο μπορεί να πέσει σε τοπικά ελάχιστα. Έχει μεγάλη σημασία, επομένως, το μέγεθος του βήματος να επιλεγεί προσεκτικά, ώστε να μην πέφτει το δίκτυο συχνά σε τοπικά ελάχιστα. Τέλος, σωστή εκπαίδευση μπορεί να γίνει μόνο με μία, και την ίδια, ομάδα προτύπων, τα οποία πρέπει να παρουσιάζονται εναλλάξ και όχι τα πρότυπα να αλλάζουν συνεχώς. Άρα, το σωστό είναι το (ε).

Άσκηση

Σχεδιάστε ένα δίκτυο που να έχει δύο εισόδους, δύο νευρώνες στο κρυμμένο επίπεδο και δύο νευρώνες στην έξοδο (2x2x2). Υπάρχει πλήρης συνδεσμολογία, αλλά μόνο από επίπεδο σε επίπεδο. Δίνεται το πρότυπο εισόδου (0.1,0.9) και η επιθυμητή έξοδος είναι το διάνυσμα (1,0). Τα βάρη αρχικά είναι όλα 0.3 από την είσοδο στο κρυμμένο επίπεδο και 0.2 από το κρυμμένο επίπεδο στην έξοδο. Επίσης η τιμή της πόλωσης στους νευρώνες είναι 0.4 και θεωρούμε ότι είναι συνάψεις με είσοδο -1. Ο ρυθμός μάθησης είναι η = 0.25. Θα χρησιμοποιήσουμε ως συνάρτηση μεταφοράς την γνωστή μας σιγμοειδή συνάρτηση. Βρείτε τις τιμές των βαρών μετά από ένα πέρασμα οπισθοδιάδοσης.

Αρχικό ΤΝΔ (2x2x2)



Είσοδοι: ένα ζεύγος διανυσμάτων εισόδου-στόχου (x,d)
Είσοδοι: Τα εκπαιδευόμενα βάρη $w_{ij}(l)$

Φάση ανάκλησης = Forward phase

Υπολογίζουμε τις εξόδους του πρώτου στρώματος l=1

$$u_3 = \begin{bmatrix} w_{31} & w_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - b_3, \quad y(3) = f(u_3) = \frac{1}{1+e^{-u_3}}$$

$$u_4 = \begin{bmatrix} w_{41} & w_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} - b_4, \quad y(4) = f(u_4) = \frac{1}{1+e^{-u_4}}$$

Υπολογίζουμε τις εξόδους του δεύτερου στρώματος l=2

$$u_5 = \begin{bmatrix} w_{53} & w_{54} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} - b_5, \quad y(5) = f(u_5) = \frac{1}{1+e^{-u_5}}$$

$$u_6 = \begin{bmatrix} w_{63} & w_{64} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} - b_6, \quad y(6) = f(u_6) = \frac{1}{1+e^{-u_6}}$$

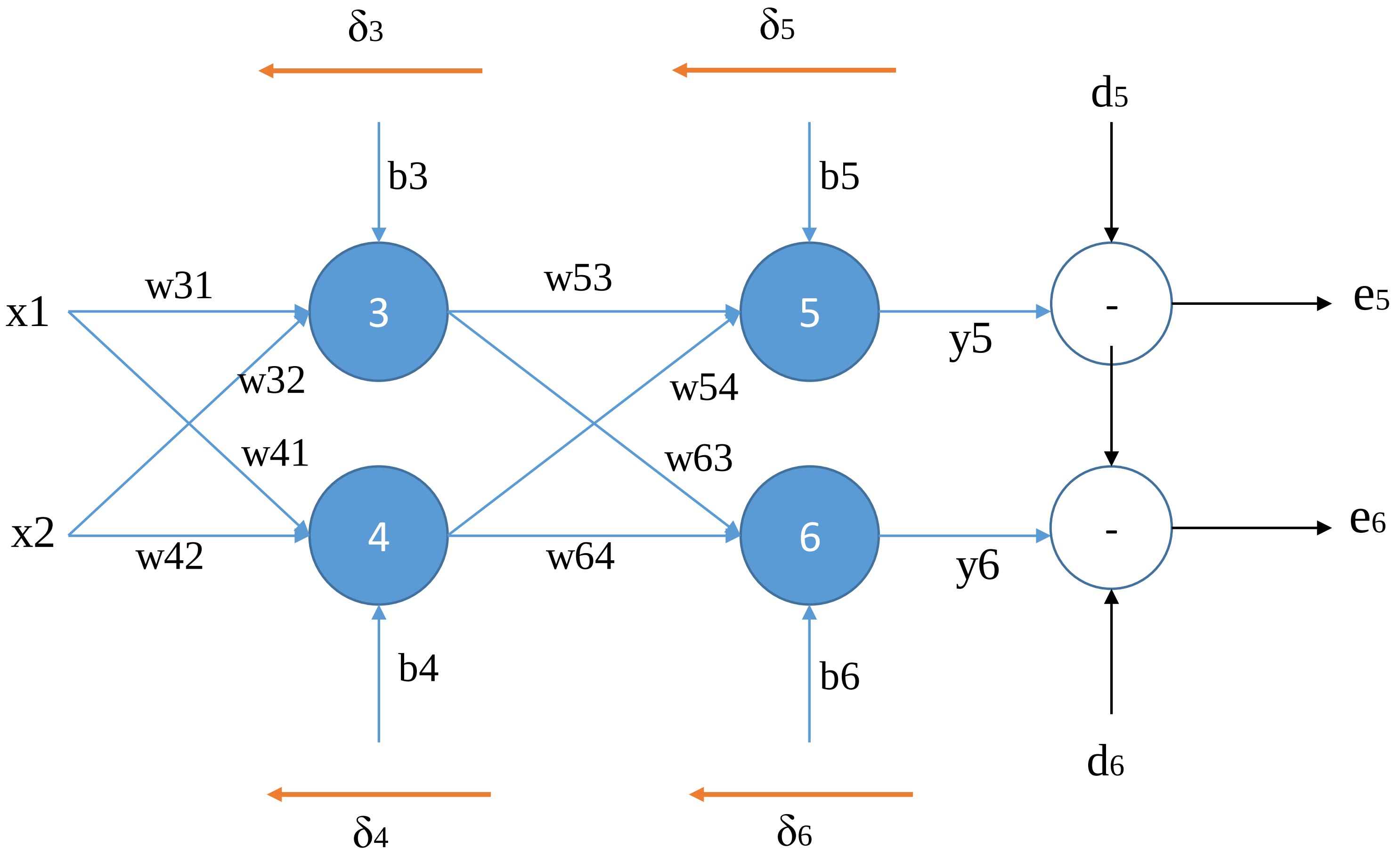
Αποτελέσματα στη φάσης της ανάκλησης

$$\text{Νευρώνας 3: } u_3 = -0.1, y_3 = 0.475$$

$$\text{Νευρώνας 4: } u_4 = -0.1, y_4 = 0.475$$

$$\text{Νευρώνας 5: } u_5 = -0.21, y_5 = 0.448$$

$$\text{Νευρώνας 6: } u_6 = -0.21, y_6 = 0.448$$


δ3
δ5
d5
b3
b5
x1
w31
3
w53
5
-
e5
y5
w32
w54
w41
w63
x2
4
6
-
e6
w42
w64
y6
b4
b6
d6
δ4
δ6

Φάση υπολογισμού δ = Backward phase

Υπολογίζουμε με τον τύπο (1) τα τοπικά σφάλματα $\delta_k(L)$ του εξωτερικού στρώματος

$$\delta_5 = e_5 \cdot f'(y_5) = (d_5 - y_5) \cdot f'(y_5) = (d_5 - y_5) \cdot f(y_5) \cdot (1 - f(y_5))$$

$$\delta_6 = e_6 \cdot f'(y_6) = (d_6 - y_6) \cdot f'(y_6) = (d_6 - y_6) \cdot f(y_6) \cdot (1 - f(y_6))$$

Υπολογίζουμε με τον τύπο (2) τα τοπικά σφάλματα $\delta_j(L\text{-}1)$ του στρώματος L-1

$$\delta_3 = f'(y_3) \cdot (w_{53} \cdot \delta_5 + w_{63} \cdot \delta_6)$$

$$\delta_4 = f'(y_4) \cdot (w_{54} \cdot \delta_5 + w_{64} \cdot \delta_6)$$

Αποτελέσματα υπολογισμού του δ

$$\delta_5 = 0.137$$

$$\delta_6 = -0.111$$

$$\delta_3 = 0.001$$

$$\delta_4 = 0.001$$

Φάση ενημέρωσης βαρών = Update phase

Με βάση τον τύπο (3) ενημερώνουμε τα βάρη του εξωτερικού στρώματος

$$w_{53}(\text{new}) = w_{53}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_5 \cdot y_3$$

$$w_{54}(\text{new}) = w_{54}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_5 \cdot y_4$$

$$w_{63}(\text{new}) = w_{63}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_6 \cdot y_3$$

$$w_{64}(\text{new}) = w_{64}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_6 \cdot y_4$$

$$b_5(\text{new}) = b_5(\text{old}) + \eta \cdot \delta_5 \cdot (-1)$$

$$b_6(\text{new}) = b_6(\text{old}) + \eta \cdot \delta_6 \cdot (-1)$$

Αποτελέσματα υπολογισμού των νέων βαρών στο εξωτερικό στρώμα

$$w_{53}(\text{new}) = 0.2+0.25\cdot 0.137\cdot 0.475=0.216$$

$$w_{54}(\text{new}) = 0.2+0.25\cdot 0.137\cdot 0.475=0.216$$

$$w_{63}(\text{new}) = 0.2+0.25\cdot(-0.111)\cdot 0.475=0.187$$

$$w_{64}(\text{new}) = 0.2+0.25\cdot(-0.111)\cdot 0.475=0.187$$

$$b_5(\text{new}) = 0.4+0.25\cdot 0.137\cdot\left(-1\right) = 0.366$$

$$b_6(\text{new}) = 0.4+0.25\cdot(-0.111)\cdot\left(-1\right) = 0.428$$

Με βάση τον τύπο (4) ενημερώνουμε τα βάρη του εσωτερικού στρώματος

$$w_{31}(\text{new}) = w_{31}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_3 \cdot x_1$$

$$w_{32}(\text{new}) = w_{32}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_3 \cdot x_2$$

$$w_{41}(\text{new}) = w_{41}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_4 \cdot x_1$$

$$w_{42}(\text{new}) = w_{42}(\text{old}) + \eta \cdot \delta_4 \cdot x_2$$

$$b_3(\text{new}) = b_3(\text{old}) + \eta \cdot \delta_3 \cdot (-1)$$

$$b_4(\text{new}) = b_4(\text{old}) + \eta \cdot \delta_4 \cdot (-1)$$

Αποτελέσματα υπολογισμού των νέων βαρών στο εσωτερικό στρώμα

$$w_{31}(\text{new}) = 0.3 + 0.25 \cdot 0.001 \cdot 0.1 \approx 0.3$$

$$w_{32}(\text{new}) = 0.3 + 0.25 \cdot 0.001 \cdot 0.9 \approx 0.3$$

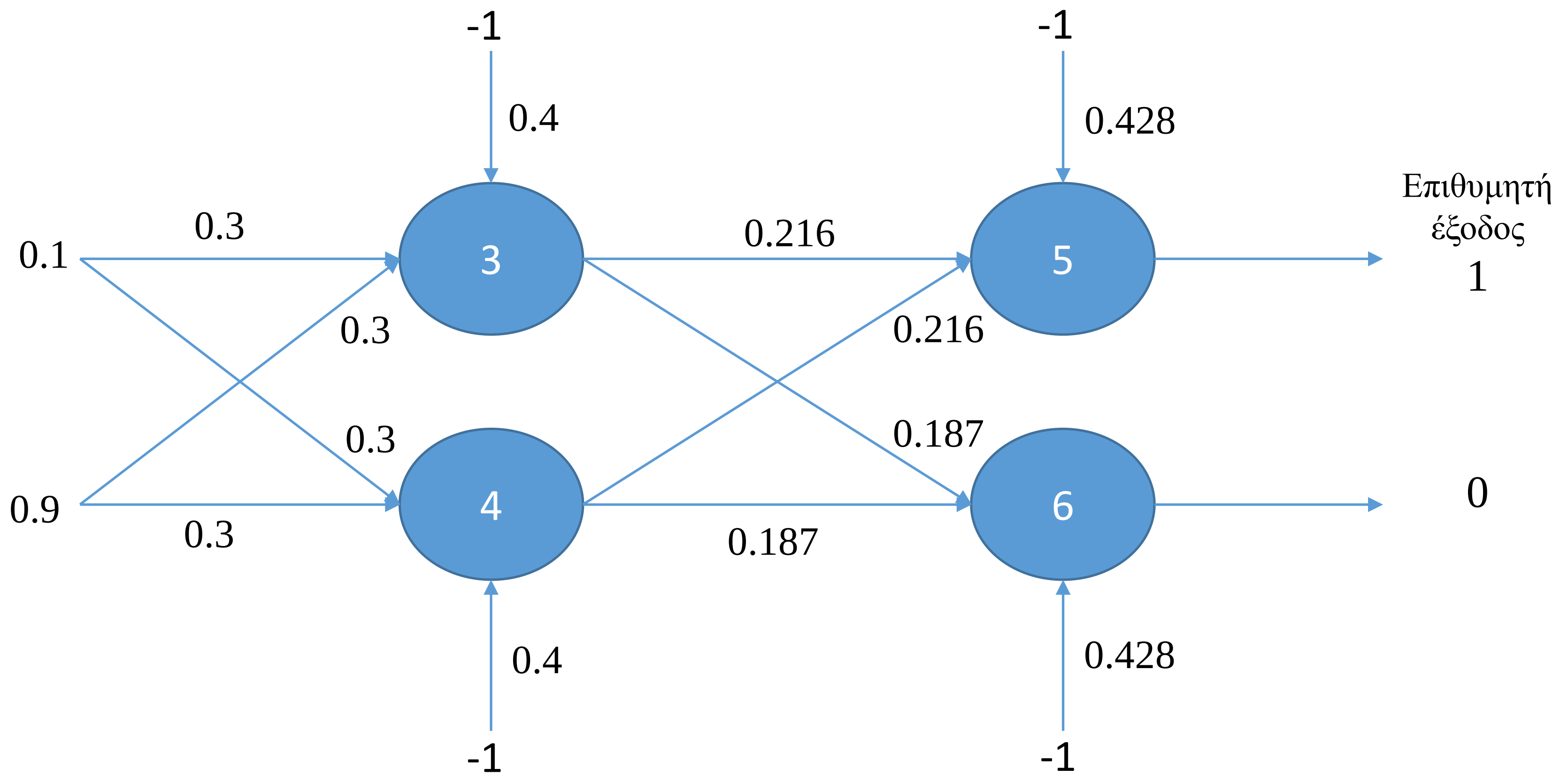
$$w_{41}(\text{new}) = 0.3 + 0.25 \cdot 0.003 \cdot 0.1 \approx 0.3$$

$$w_{42}(\text{new}) = 0.3 + 0.25 \cdot 0.001 \cdot 0.9 \approx 0.3$$

$$b_3(\text{new}) = 0.4 + 0.25 \cdot 0.001 \cdot (-1) \approx 0.4$$

$$b_4(\text{new}) = 0.4 + 0.25 \cdot 0.001 \cdot (-1) \approx 0.4$$

Το ΤΝΔ μετά από ένα κύκλο εκπαίδευσης με τα ενημερωμένα βάρη



Αποτελέσματα υπολογισμού της εξόδου με τα νέα βάρη

$$\text{Νευρώνας 3: } u_3 = -0.1, y_3 = 0.475$$

$$\text{Νευρώνας 4: } u_4 = -0.1, y_4 = 0.475$$

$$\text{Νευρώνας 5: } u_5 = -0.161, y_5 = 0.46$$

$$\text{Νευρώνας 6: } u_6 = -0.25, y_6 = 0.438$$

Η τελική έξοδος με τα νέα βάρη είναι (0.46,0.438)

Προσέγγιση συνάρτησης με MLP στο MATLAB

Δημιουργία δικτύου MLP με κώδικα και GUI

Η μαθηματική μορφή της συνάρτησης είναι: $y = 2x - 0.2x^2$

Από τη μαθηματική μελέτη της συνάρτησης προκύπτει ότι η πρώτη παράγωγος

$$dy/dx = 2 - 0.4x$$

μηδενίζεται στο σημείο x=5.

Η δεύτερη παράγωγος της συνάρτησης είναι αρνητική $\frac{d^2y}{dx^2} = -0.4 < 0$

που σημαίνει ότι το σημείο (5,5) αποτελεί μέγιστο της συνάρτησης.

Το MLP (1-5-1) αποτελείται από μια είσοδο, ένα ενδιάμεσο στρώμα με 5 νευρώνες και μια έξοδο.

Δεδομένα εκπαίδευσης και ανάκλησης

```
x1=0:0.5:10;
x2=0:1:10;
y1=2*x1-0.21*x1.^2;
x2=0:1:10;
y2=2*x2-0.21*x2.^2;
```

Αποθήκευση δεδομένων x1 και y1 στο αρχείο data: save data x1 y1

Σύνταξη των εντολών newff, train, sim, net.train.Param.epochs
net.iw, net.layers {1}: δομή του 1ου επιπέδου
net.b, net.layers {2}: δομή του 2ου επιπέδου

Δόμηση δικτύου

```
>> net=newff(x1,y1,5,{'tansig'});
```

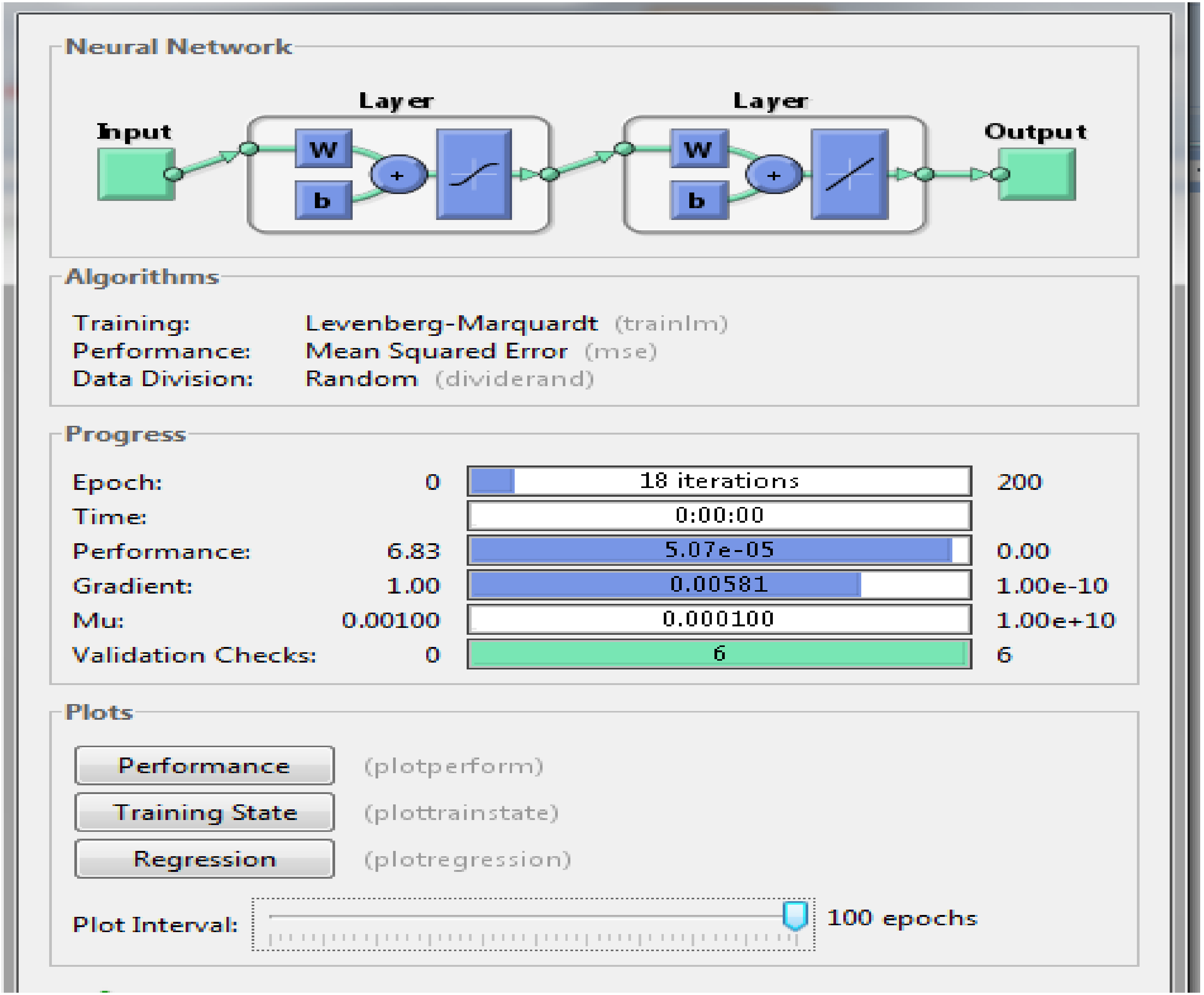
5: υπάρχει κρυφό στρώμα με 5 νευρώνες

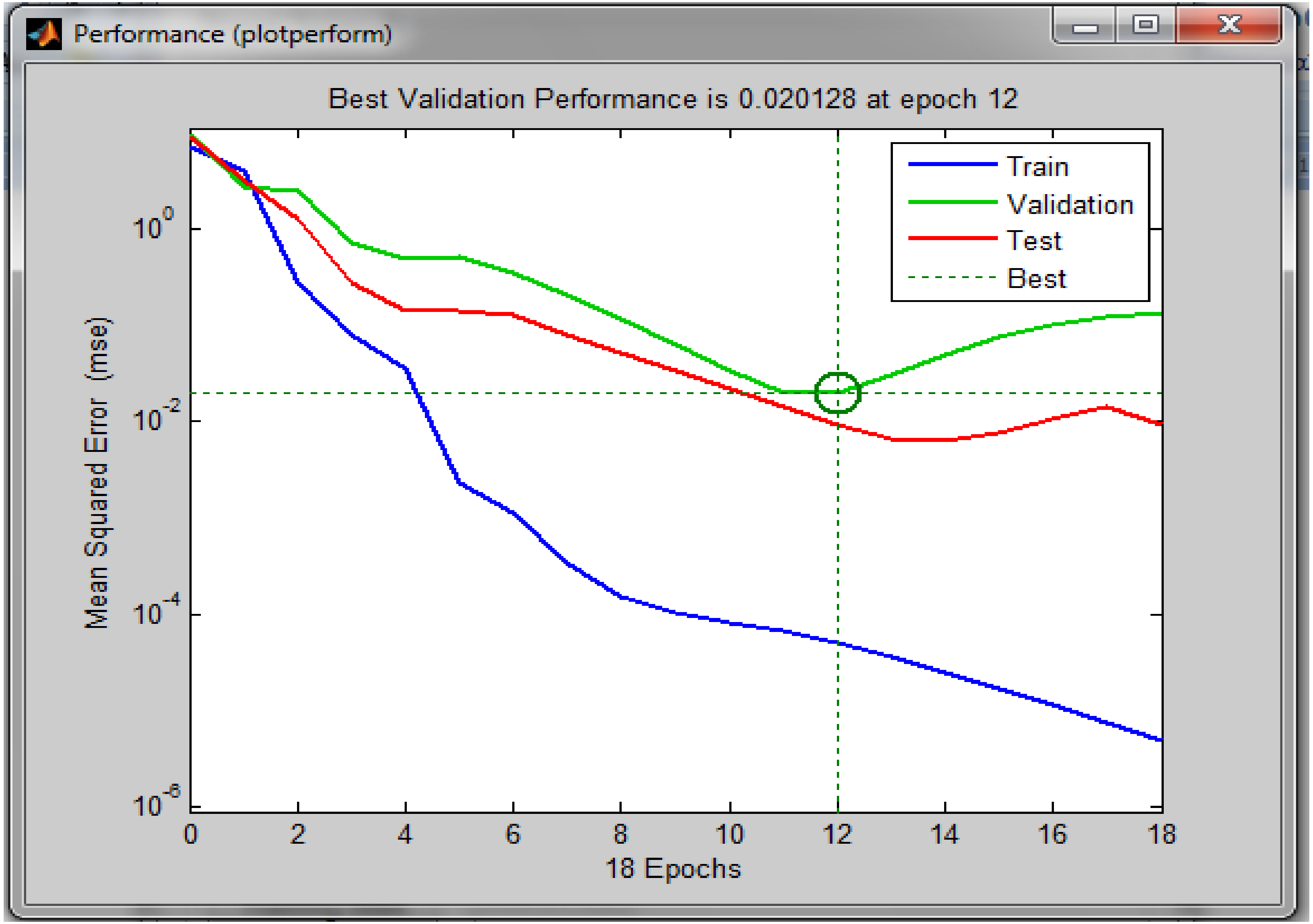
Εκπαίδευση δικτύου

```
>> net.trainParam.epochs=200;
>> net=train(net,x1,y1);
```

Ανάκληση δικτύου

```
Y=sim(net,x2)
plot(x2,y2,x2,Y,’r’);
net.train.Param.goal=0.01
```

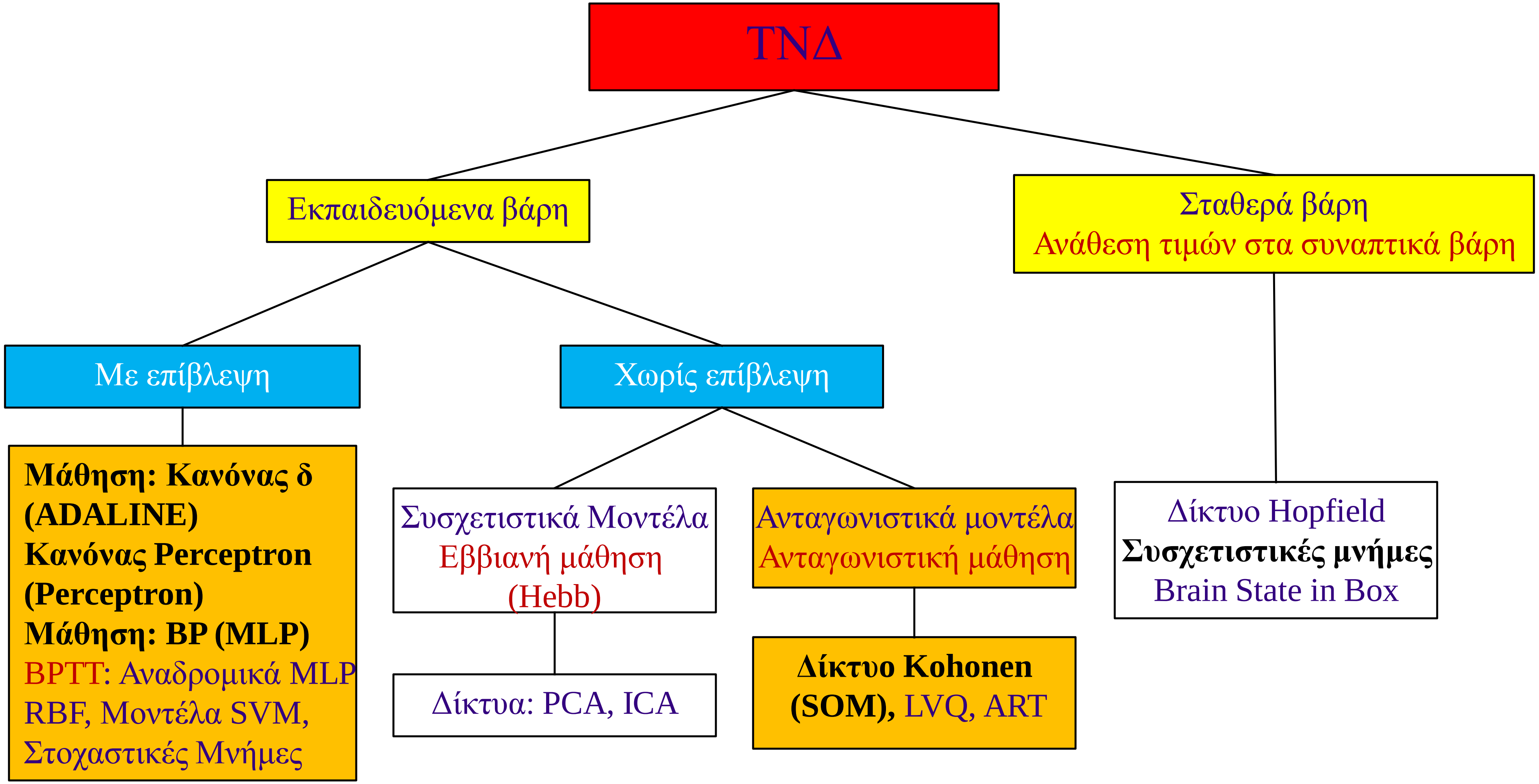

Neural Network
Input
Layer
W
b
Layer
W
b
Output
Algorithms
Training: Levenberg-Marquardt (trainlm)
Performance: Mean Squared Error (mse)
Data Division: Random (dividerand)
Progress
Epoch: 0 18 iterations 200
Time: 0:00:00
Performance: 6.83 5.07e-05 0.00
Gradient: 1.00 0.00581 1.00e-10
Mu: 0.00100 0.000100 1.00e+10
Validation Checks: 0 6 6
Plots
Performance (plotperform)
Training State (plottrainstate)
Regression (plotregression)
Plot Interval: 100 epochs


Performance (plotperform)
Best Validation Performance is 0.020128 at epoch 12
Train
Validation
Test
Best
Mean Squared Error (mse)
10^{0}
10^{-2}
10^{-4}
10^{-6}
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
18 Epochs


5
4
3
2
1
0
-1
-2
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Ταξινόμηση νευρωνικών αλγορίθμων

Το αντικείμενο μελέτης των ΤΝΔ είναι η ανάπτυξη αλγορίθμων που να μιμούνται την αρχιτεκτονική και τη λειτουργία των βιολογικών νευρωνικών δικτύων.



Δίκτυα SOM Kohonen

Οι αλγόριθμοι που έχουν παρουσιαστεί μέχρι τώρα ανήκουν στην κατηγορία της επιβλεπόμενης μάθησης, δηλαδή για κάθε είσοδο γνωρίζουμε και την αντίστοιχη έξοδο.

Στη διάλεξη αυτή παρουσιάζεται ένας νέος τύπος δικτύου (δίκτυο Kohonen) το οποίο εκπαιδεύεται **χωρίς επίβλεψη**. Δίδεται η δομή του δικτύου, καθώς και τα διάφορα βήματα εκπαίδευσής του.

Βασικές έννοιες

- *Δίκτυο τύπου Kohonen*
- *αυτο–οργάνωση*
- *εκπαίδευση χωρίς επιτήρηση*
- *γειτονιά νευρώνα.*

Το δίκτυο SOM (Self Organizing Map: Αυτοοργανούμενος Χάρτης) Kohonen ανήκει στην κατηγορία των δικτύων που εκπαιδεύονται χωρίς επίβλεψη.

Τα χαρακτηριστικά του δικτύου Kohonen είναι ότι μπορεί να ταξινομεί διανύσματα με την βοήθεια ενός αλγόριθμου αυτόνομης μάθησης. Κάνει λοιπόν μία αντιστοίχιση του εισερχόμενου πρότυπου σήματος, τυχαίας διάστασης σε ένα διακριτό χάρτη μιας ή δύο διαστάσεων και για τον λόγο αυτό λέμε ότι επιτελεί μία αυτο–οργανούμενη απεικόνιση χαρακτηριστικών (self–organizing feature map).

Το δίκτυο kohonen αξιοποιεί ένα είδος μη επιβλεπόμενης μάθησης γνωστή ως **ανταγωνιστική μάθηση** (competitive learning). Στην ανταγωνιστική μάθηση μόνο ένας νευρώνας μπορεί να είναι ενεργός κάθε φορά. Οι νευρώνες ανταγωνίζονται μεταξύ τους για το ποιος ταιριάζει καλύτερα στο διάνυσμα εισόδου.

Ο νευρώνας που κερδίζει τον ανταγωνισμό ονομάζεται «**winner-takes-all neuron**».

Το δίκτυο SOM Kohonen αποτελείται από δύο επίπεδα.

Το πρώτο επίπεδο είναι το επίπεδο εισόδου (οι νευρώνες εισόδου δεν κάνουν καμία επεξεργασία).

Το δεύτερο επίπεδο είναι το επίπεδο εξόδου και έχει το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό ότι είναι οργανωμένο σε μορφή πλέγματος, που μπορεί να έχει οποιαδήποτε διάσταση.

Η διάταξη του δικτύου μπορεί να είναι είτε **μονοδιάστατη** είτε μια **διδιάστατη** συστοιχία από νευρώνες. Η θέση των νευρώνων και στις δύο μορφές έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς η τοπογραφική οργάνωση χρησιμοποιεί την έννοια της **γειτονιάς**, δηλαδή ένα σύνολο νευρώνων που βρίσκονται σε διπλανές θέσεις στο πλέγμα.

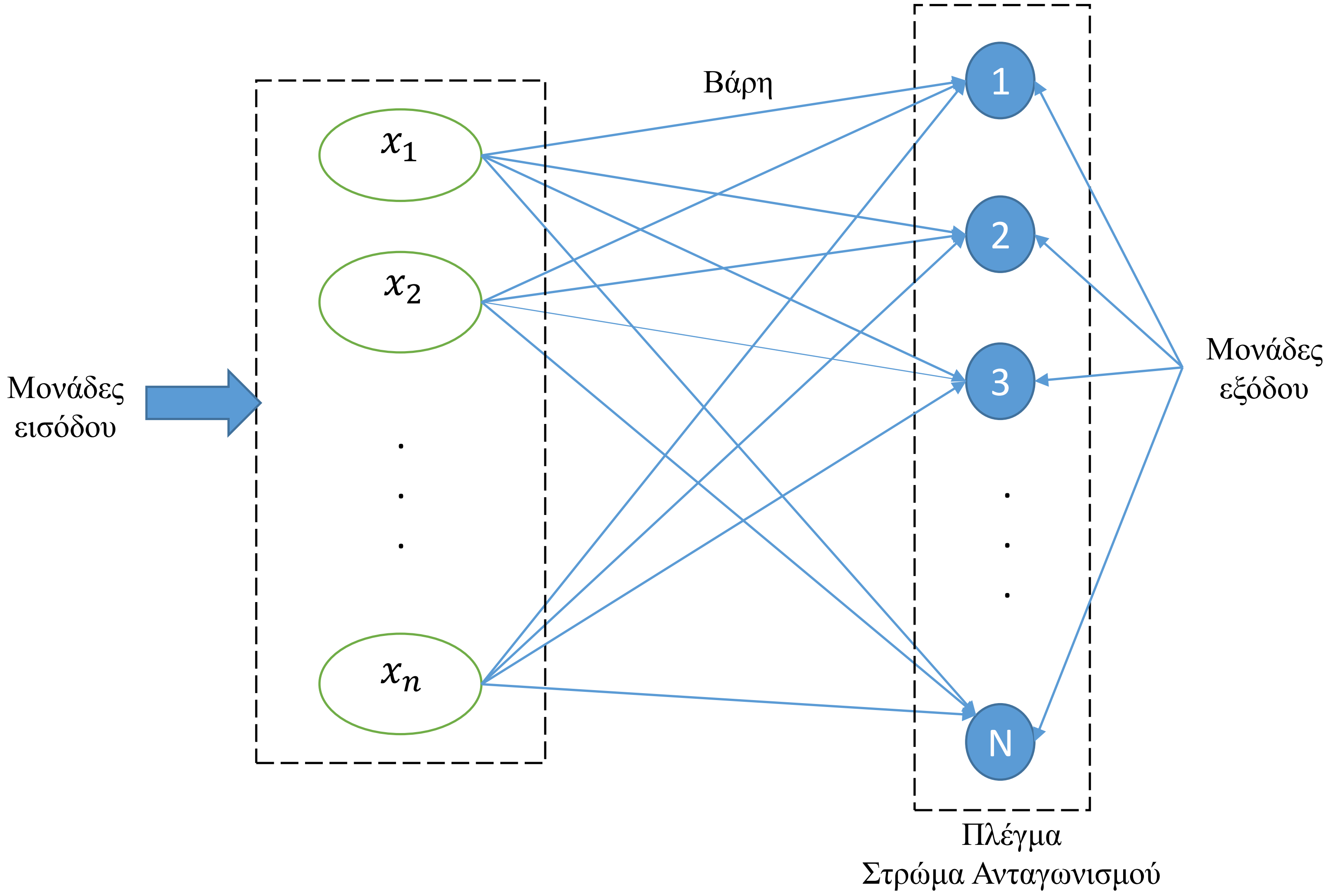
Τα δύο αυτά επίπεδα έχουν πλήρη συνδεσμολογία, δηλαδή κάθε μονάδα εισόδου συνδέεται με όλες τις μονάδες του δεύτερου επιπέδου (**forward connections**).

Πού χρησιμοποιείται το μοντέλο SOM Kohonen

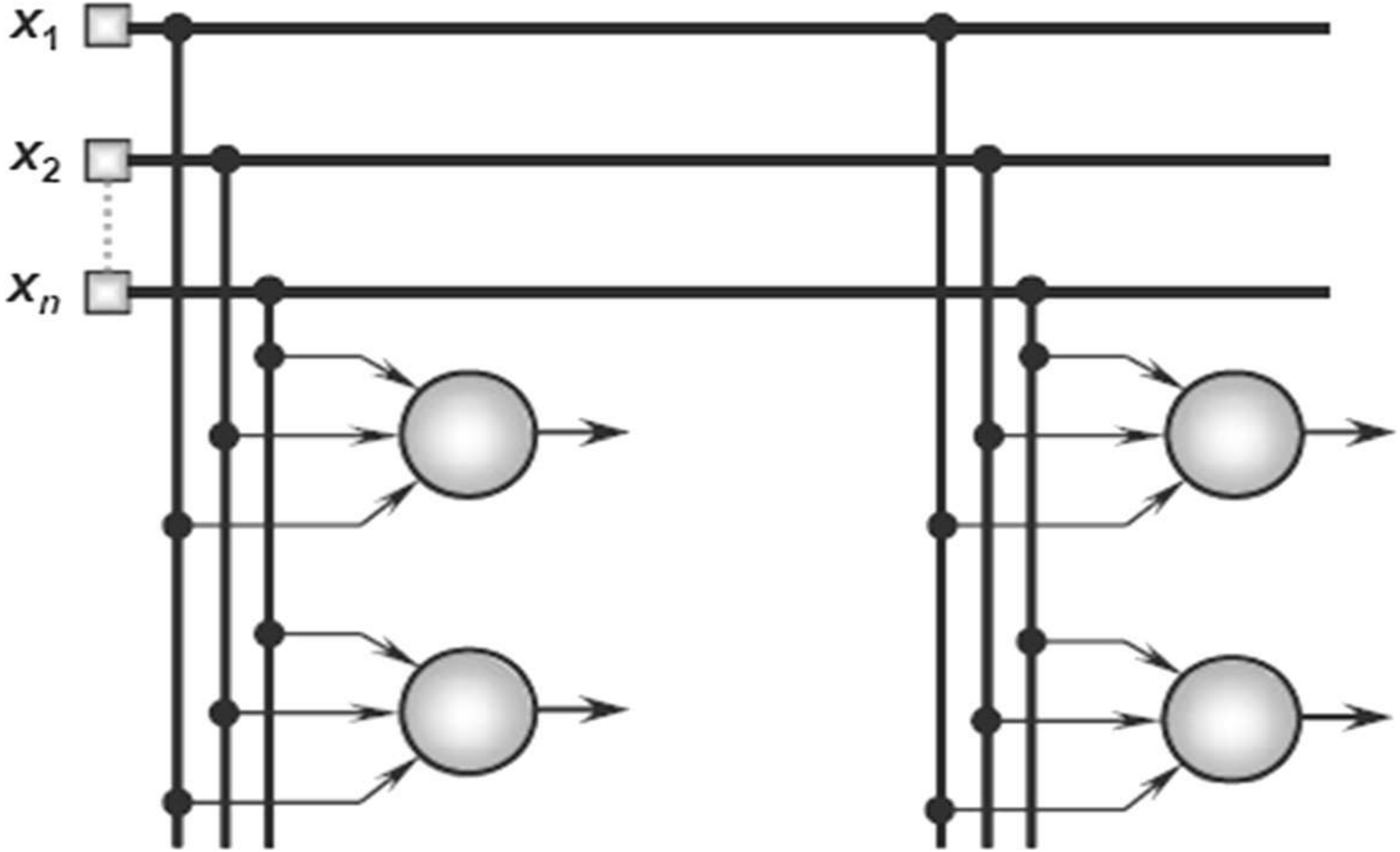
Το μοντέλο SOM Kohonen χρησιμοποιείται οπουδήποτε απαιτείται **ταξινόμηση προτύπων** σε κλάσεις χωρίς πρότερη γνώση του αριθμού των κλάσεων και χωρίς χρήση δασκάλου.

- Αναγνώριση ομιλίας (speech recognition)
- Σημασιολογικός χάρτης (semantic map): ομαδοποίηση των λέξεων με βάση τη σημασία τους.
- Αναζήτηση σε βάσεις δεδομένων κειμένου

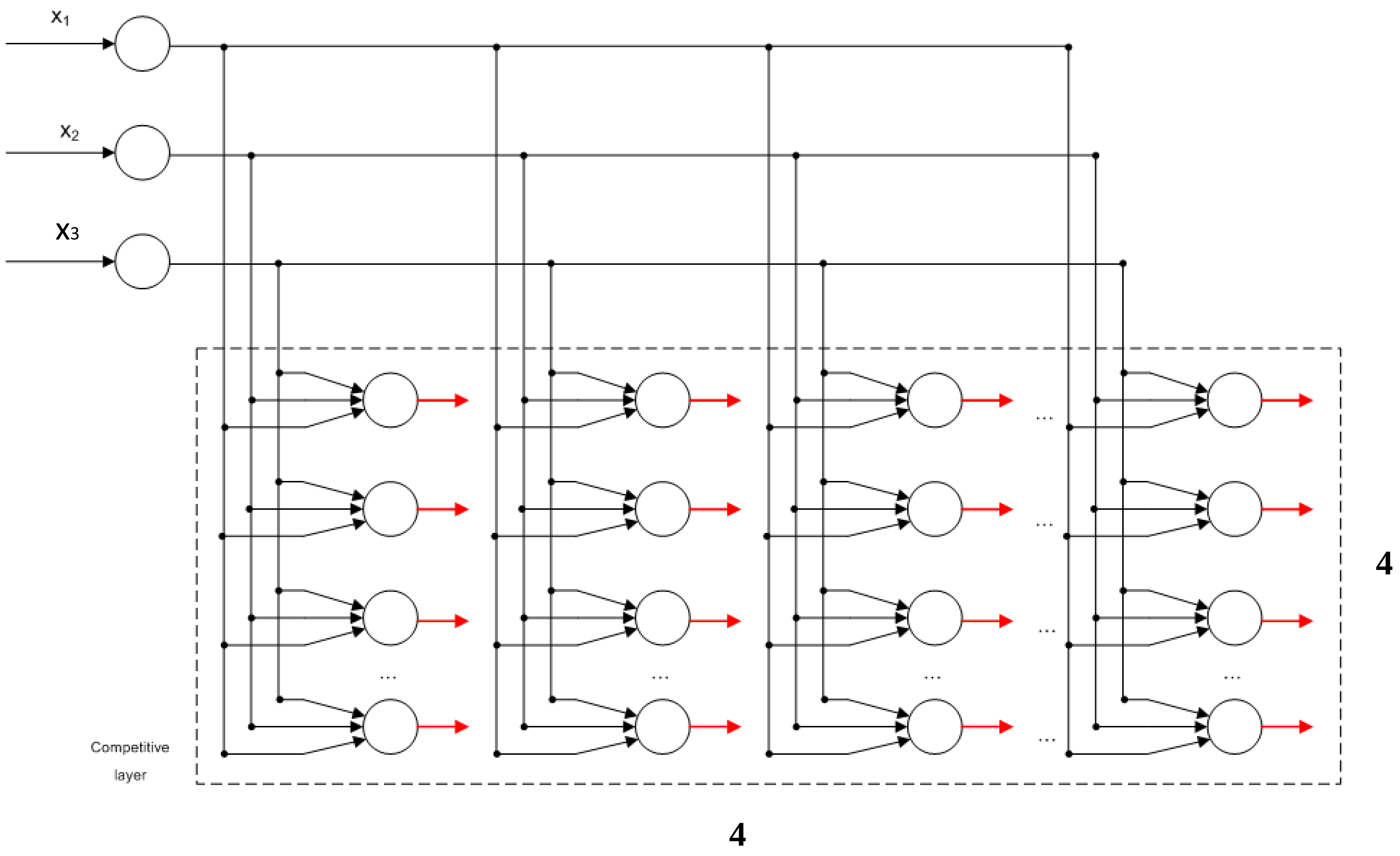
Μονοδιάστατο πλέγμα, δηλ. ένα επίπεδο που έχει επάνω του N x 1 υπολογιστικές μονάδες νευρώνων και *n* εισόδους.



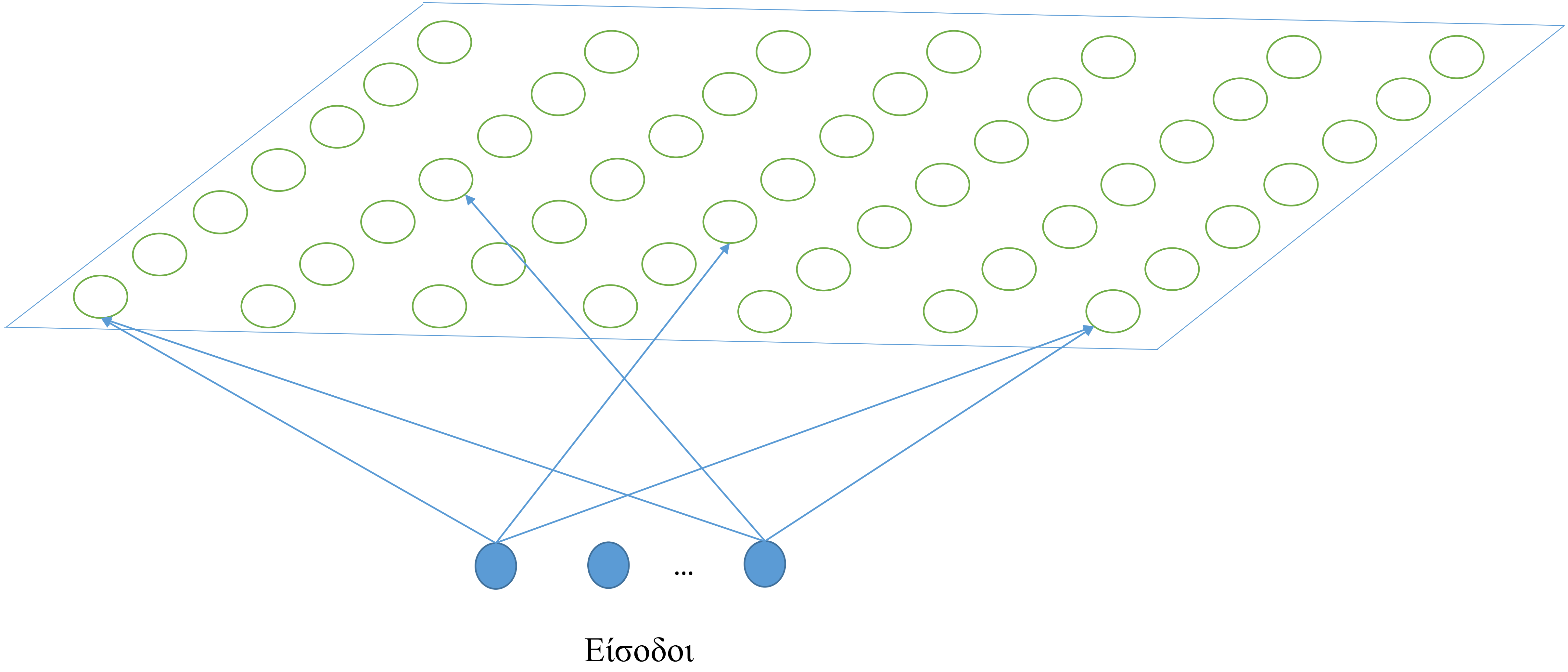
Μονοδιάστατο πλέγμα, δηλ. ένα επίπεδο που έχει επάνω του 4 x 1 υπολογιστικές μονάδες νευρώνων και 3 εισόδους.



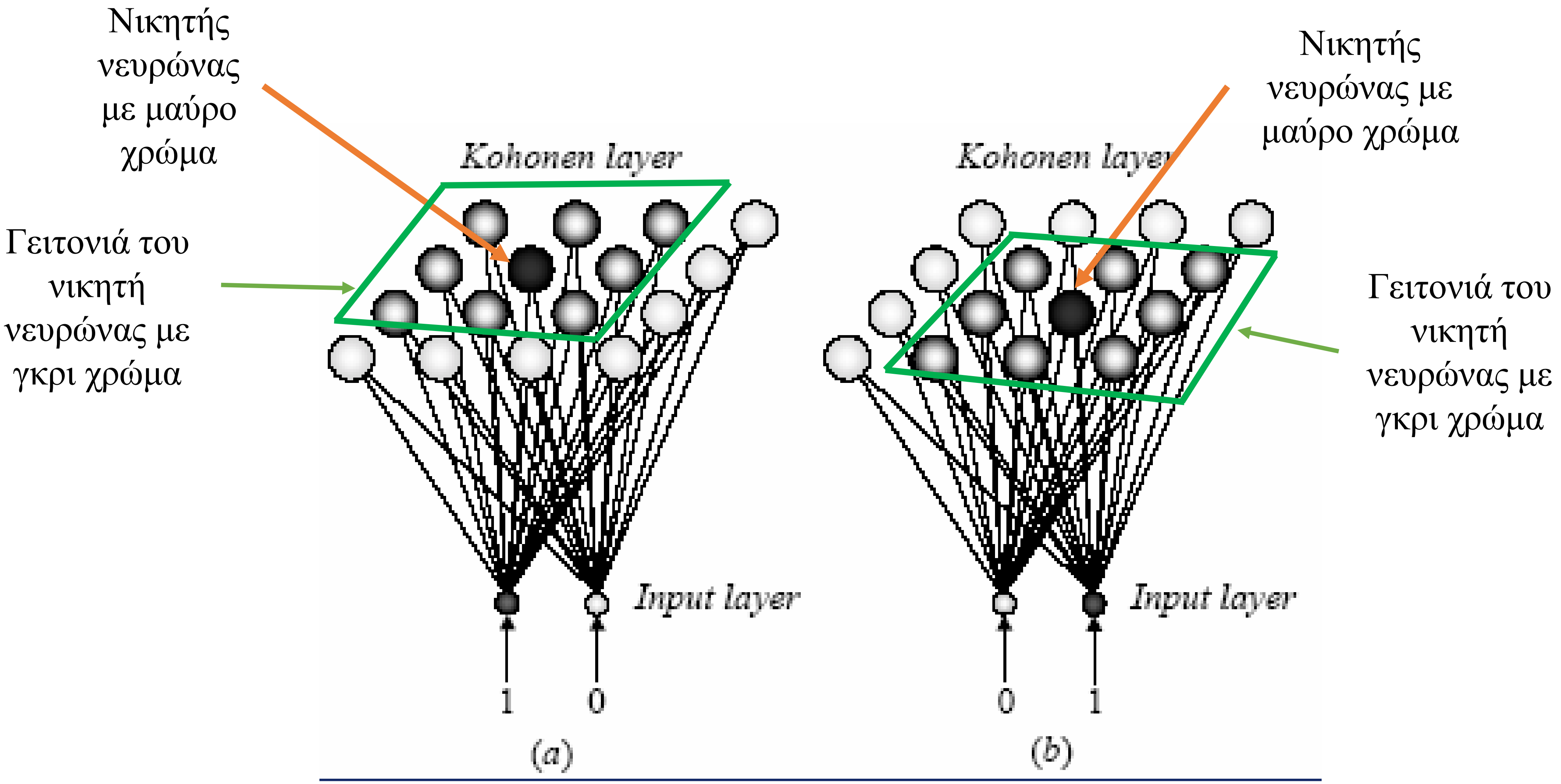
Διδιάστατο πλέγμα νευρώνων με είσοδο τριών διαστάσεων και έξοδο 4x4 διαστάσεων.

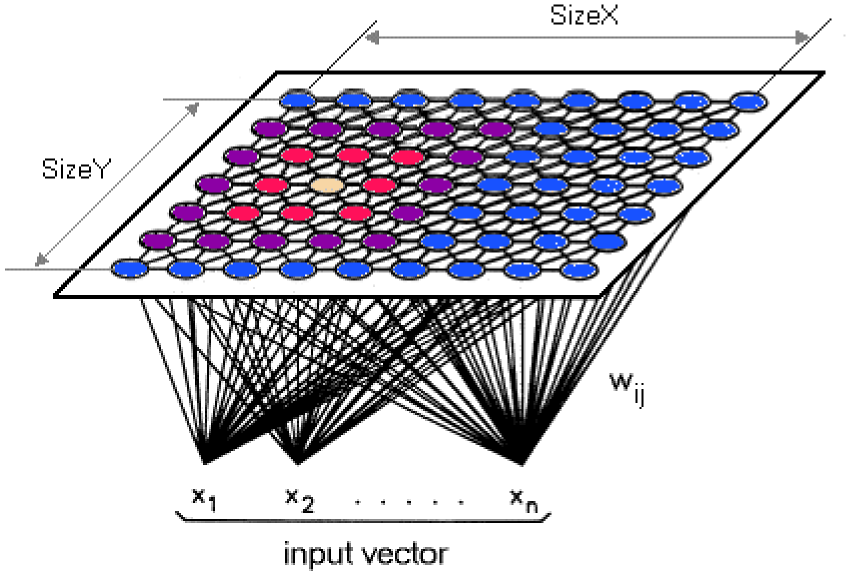


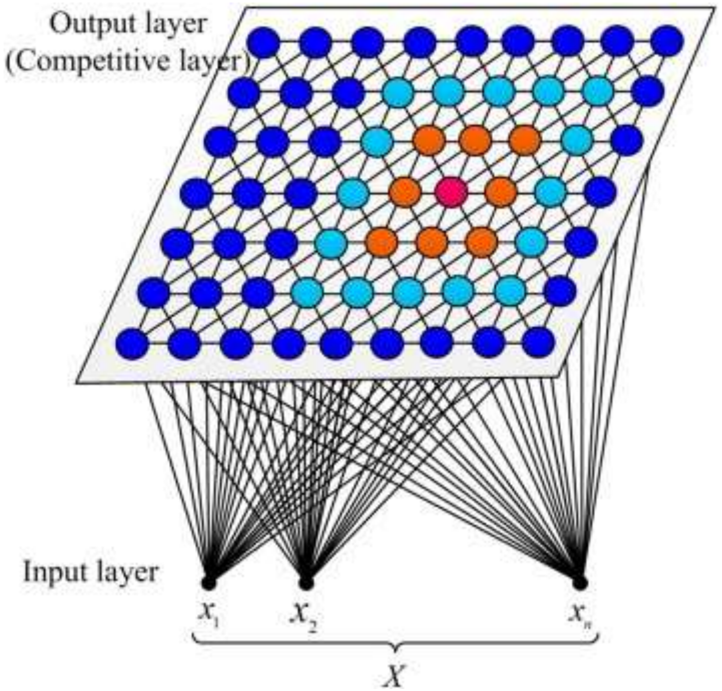
Διδιάστατο πλέγμα, δηλ. μία επιφάνεια που έχει επάνω της N_1 x N_2 υπολογιστικές μονάδες νευρώνων.



Σύμφωνα με τον kohonen η θέση ενός νευρώνα εξόδου σε ένα τοπογραφικό χάρτη αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο χαρακτηριστικό του προτύπου εισόδου.




SizeX
SizeY
w_{ij}
x_1 x_2 . . . . . . x_n
input vector


Output layer
(Competitive layer)
Input layer
x_1 x_2 x_n
X

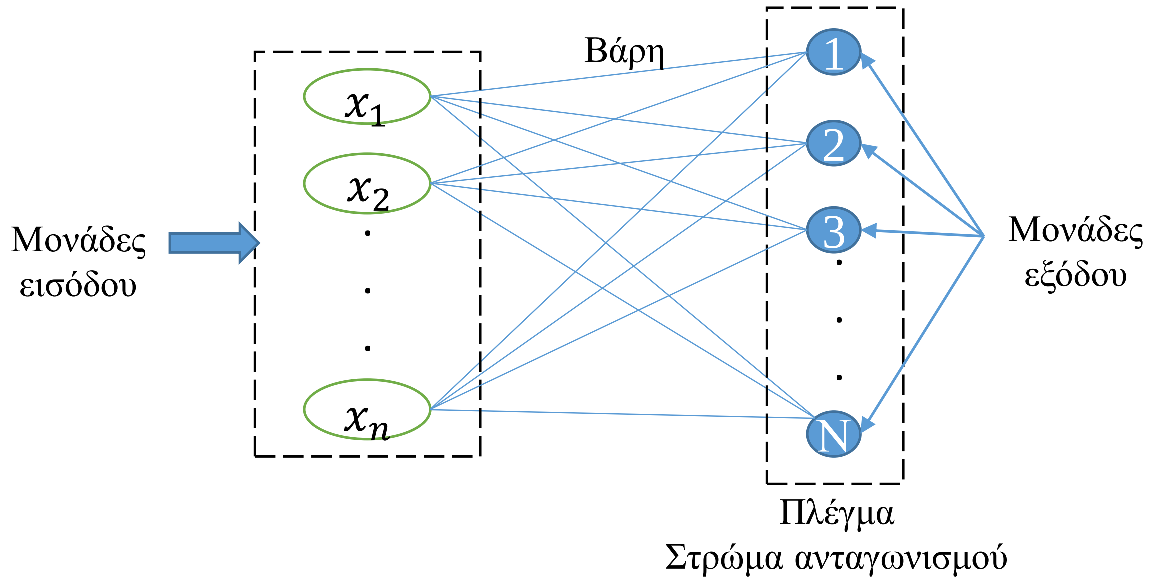
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΣΥΜΒΟΛΑ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ SOM

k διάνυσμα εισόδου $\boldsymbol{x_k} = \begin{bmatrix} x_{k1} \\ x_{k2} \\ \dots \\ x_{kn} \end{bmatrix}$

$$\boldsymbol{x}_k = \{x_{ki}: k = 1, \dots, P, i = 1, \dots, n\}$$

Ο συνολικός πίνακας των διανυσμάτων εισόδου $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1 \boldsymbol{x}_2 \cdots \boldsymbol{x}_P] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} \cdots & x_{P1} \\ x_{12} & x_{22} \cdots & x_{P2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} \cdots & x_{Pn} \end{bmatrix}$

P πλήθος προτύπων



$$\boldsymbol{w}_j = \{w_{ji}: j = 1, \dots, N, i = 1, \dots, n\}$$

Το διάνυσμα των βαρών του j νευρώνα $\boldsymbol{w_j} = \begin{bmatrix} w_{j1} \\ w_{j2} \\ \dots \\ w_{jn} \end{bmatrix}$

Ο συνολικός πίνακας των βαρών $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_1 \boldsymbol{w}_2 \cdots \boldsymbol{w}_N] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \cdots & w_{N1} \\ w_{12} & w_{22} \cdots & w_{N2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ w_{1n} & w_{2n} \cdots & w_{Nn} \end{bmatrix}$

Κριτήρια ταιριάσματος σε ένα ανταγωνιστικό δίκτυο

- Το πιο συνηθισμένο κριτήριο ταιριάσματος είναι το τετράγωνο της ευκλείδειας απόστασης του διανύσματος της εισόδου $\boldsymbol{x}$ από το διάνυσμα των βαρών $\boldsymbol{w}$ του νευρώνα.

$$d = \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}\|^2$$

Όσο μικρότερη είναι η ευκλείδεια απόσταση τόσο μεγαλύτερη ομοιότητα έχουν τα διανύσματα.

- Ως κριτήριο ταιριάσματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί και το εσωτερικό αριθμητικό γινόμενο του διανύσματος της εισόδου $\boldsymbol{x}$ από το διάνυσμα των βαρών $\boldsymbol{w}$ του νευρώνα.

$$d = \boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{x}$$

Εάν $\|\boldsymbol{w}\| = \|\boldsymbol{x}\| = 1$ (κανονοικοποιημένα) τότε η ισχύει η επόμενη σχέση

$$d = (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x})^T \cdot (\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}) = 2 - 2\boldsymbol{w}^T \cdot \boldsymbol{x}$$

Η ελαχιστοποίηση του τετραγώνου της ευκλείδειας απόστασης ισοδυναμεί με μεγιστοποίηση του εσωτερικού γινομένου και κατά συνέπεια το βαθμό ομοιότητας των δύο διανυσμάτων.

Αλγόριθμος εκπαίδευσης του δικτύου SOM για μονοδιάστατο πλέγμα 1 x N

Είσοδοι: Η διάσταση του πλέγματος και τα P πρότυπα εισόδου.

Αρχικοποίηση: Επιλέγουμε τυχαίες τιμές στα αρχικά διανύσματα των βαρών. Επιλέγουμε αρχικές τιμές για το βήμα εκπαίδευσης α και το εύρος της γειτονιάς r.

Για κάθε εποχή t = 0,1,2…, μέγιστος αριθμός εποχών

Για κάθε πρότυπο εισόδου $k = 1,\ldots,P$

Για κάθε νευρώνα j

υπολόγισε το κριτήριο ταιριάσματος μεταξύ βαρών και εισόδου (το τετράγωνο της ευκλείδειας απόστασης)

$$d_j = \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{ki} - w_{ji}\right)^2$$

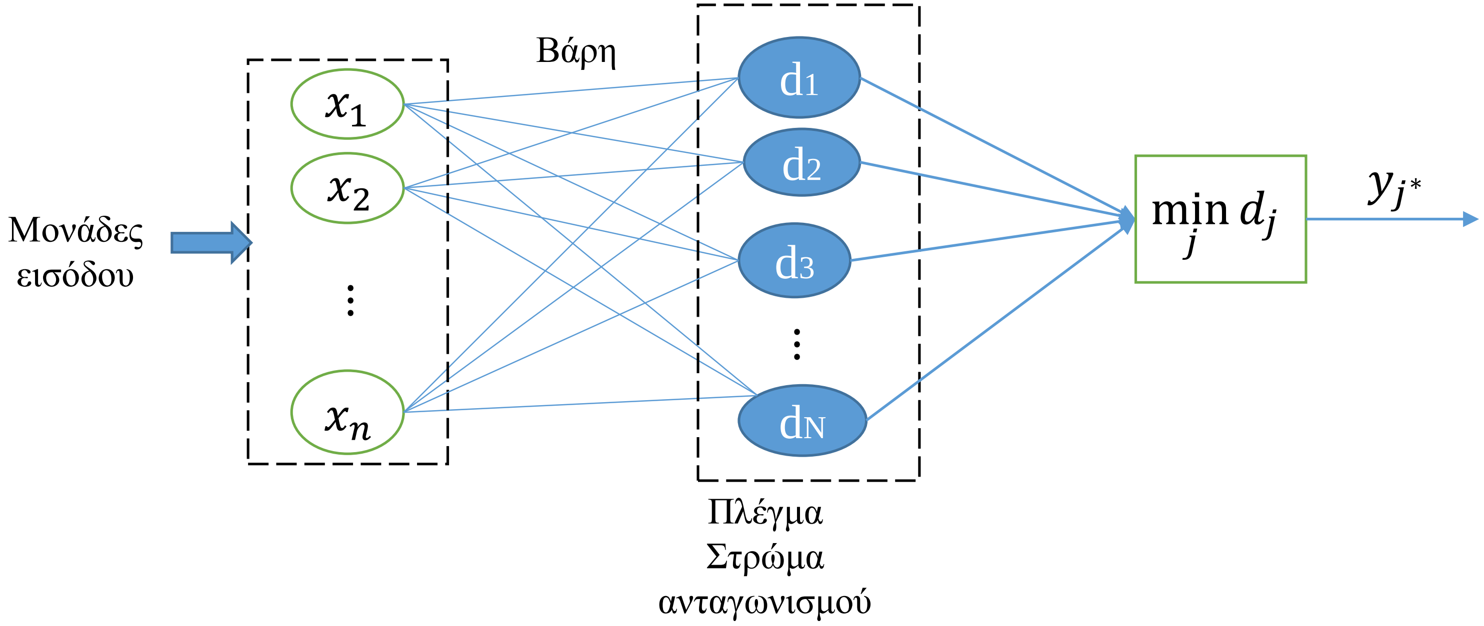
Βρες το νικητή νευρώνα: $d_{j^*} = \min_j d_j, j = 1, \ldots, N$

Εκπαίδευσε τα βάρη του νικητή νευρώνα: $\boldsymbol{w}_{j^*i}(k+1) = \boldsymbol{w}_{j^*i}(k) + a(t) \cdot \left[\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{ki}} - \boldsymbol{w}_{j^*i}(k)\right], i = 1, \ldots, n$

Για τους νευρώνες του επιπέδου kohonen η έξοδος τους δίνεται από τη σχέση:

$$y_j = \begin{cases} 1, j \in \Gamma(j^*) \\ 0, j \notin \Gamma(j^*) \end{cases}$$

$\Gamma(j^*)$ είναι η γειτονιά του νικητή νευρώνα.



Επιλογή των παραμέτρων του δικτύου SOM

1) Επιλογή του ρυθμού μάθησης α(k)

Γενικά καλό είναι ο ρυθμός μάθησης να φθίνει σταδιακά προς το μηδέν όσο προχωρά η εκπαίδευση ώστε να αποκρυσταλλώνεται μια κατάσταση των βαρών και να μην υπάρχουν συνεχείς παλινδρομήσεις με την πρόοδο της εκπαίδευσης. Στην αρχή πρέπει να είναι κοντά στο 1 (π.χ. πρώτες 1000 επαναλήψεις) και κατόπιν να μειώνεται σταδιακά παραμένοντας πάνω από το 0.1.

Η εξίσωση της ελάττωσης του α μπορεί να δοθεί από τη γραμμική σχέση

$$a(t) = a(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right), t = 0,1,2 \ldots$$

όπου α(0) η αρχική τιμή, T ο συνολικός αριθμός των επαναλήψεων (εποχών) και *t* ο αριθμός της τρέχουσας επανάληψης.

Η εξίσωση της ελάττωσης του α μπορεί να δοθεί και από την εκθετική σχέση

$$a(t) = a(0) \cdot e^{-\frac{t}{T}}, t = 0,1,2 \ldots$$

2) Επιλογή σχήματος και μεγέθους γειτονιάς

Η γειτονιά του νικητή νευρώνα είναι μια συμμετρική περιοχή γύρω από τον νικητή νευρώνα.
Συνήθως έχει τετραγωνικό ή ρομβικό σχήμα το οποίο συρρικνώνεται με το χρόνο.

$$\mathrm{r}(t) = r(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right), t = 0,1,2 \ldots$$

όπου r(0) η αρχική τιμή της ακτίνας, που μπορεί να ξεκινάει τόσο μεγάλη ώστε να περιέχει τους μισούς νευρώνες του δικτύου. r = 1 είναι η μικρότερη δυνατή απόσταση από τον νικητή νευρώνα και r = 0 δεν υφίσταται γειτονιά.

3) Επιλογή του πλήθους των εποχών

Η πρώτη φάση της εκπαίδευσης μπορεί να ολοκληρωθεί μέσα σε 100-200 εποχές (**exploration**).

Στη δεύτερη φάση του αλγορίθμου όπου γίνονται μικροδιορθώσεις μέσα στη γειτονιά του νευρώνα νικητή απαιτούνται πολλές επαναλήψεις (**exploitation**).

Αν π.χ. έχουμε ένα πλέγμα 10 x 10 = 100 νευρώνες τότε θα απαιτηθούν τουλάχιστον 500 x 100 = 50000 εποχές.

Ερωτήσεις

1. Ένα δίκτυο με συνολικό αριθμό κύκλων εκπαίδευσης ίσο με 1000 έχει αρχικό ρυθμό εκπαίδευσης $\alpha(0) = 0.15$ και ζητείται να βρούμε πόσους κύκλους θα χρειασθεί για να πέσει ο ρυθμός αυτός στο 0.03.

$$a(t) = a(0) \cdot \left(1 - \frac{t}{T}\right) \rightarrow 0.03 = 0.15 \cdot \left(1 - \frac{t}{1000}\right) \rightarrow t = 800$$

2. Ο αρχικός ρυθμός μάθησης είναι α(0) = 0.9, και έστω ότι το α αλλάζει με τον εξής νόμο:

$$\alpha(n+1) = \alpha(n) - 0.001$$

Βρείτε πόσους κύκλους θα χρειασθεί ούτως ώστε το α να πέσει στην τιμή 0.1.

$$\begin{aligned}
n &= 0, \qquad a(1) = a(0) - 0.001 \\
n &= 1, \qquad a(2) = a(1) - 0.001 = a(0) - 2 \cdot 0.001 \\
&\qquad \dots \\
n &= t, \qquad \boldsymbol{a(t) = a(0) - t \cdot 0.001} \rightarrow
\end{aligned}$$

$$0.1 = 0.9 - t \cdot 0.001 \rightarrow t = 800$$

3. Να αποδειχθεί ότι, όταν τα διανύσματα βαρών στον κανόνα ανταγωνιστικής μάθησης δεν είναι κανονοικοποιημένα ($\|w\| = 1$), είναι δυνατόν το διάνυσμα βαρών που είναι πλησιέστερο προς το πρότυπο εισόδου $\boldsymbol{x}$ με την ευκλείδεια απόσταση να μην επιλεγεί ως νικητής αν χρησιμοποιηθεί ως μέτρο σύγκρισης το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

Ένα διάνυσμα για γίνει κανονοικοποιημένο διαιρούμε το κάθε στοιχείο του με το μέτρο του διανύσματος.

Απάντηση

Έστω το πρότυπο διάνυσμα εισόδου: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$. Έστω τα διανύσματα βαρών: $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_1 \quad \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1 = x_1 \cdot w_{11} + x_2 \cdot w_{12} \qquad \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2 = x_1 \cdot w_{21} + x_2 \cdot w_{22}$

Έστω

$$d_1 > d_2 \Rightarrow \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1\|^2 > \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2\|^2 \Rightarrow (x_1 - w_{11})^2 + (x_2 - w_{12})^2 > (x_1 - w_{21})^2 + (x_2 - w_{22})^2 \Rightarrow$$

$$w_{11}^2 + w_{12}^2 - 2x_1 w_{11} - 2x_2 w_{12} > w_{21}^2 + w_{22}^2 - 2x_1 w_{21} - 2x_2 w_{22} \Rightarrow$$

$$\|\boldsymbol{w}_1\|^2 - 2(\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1) > \|\boldsymbol{w}_2\|^2 - 2(\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2)$$

$$\|\boldsymbol{w}_1\|^2 - 2(\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1) > \|\boldsymbol{w}_2\|^2 - 2(\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2)$$

Αν $\|\boldsymbol{w}_1\| = \|\boldsymbol{w}_2\| = 1 \Longrightarrow \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1 < \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2$

Δηλαδή με το εσωτερικό γινόμενο επιλέγεται ως νικητής ο δεύτερος νευρώνας.

Αν $\|\boldsymbol{w}_1\| \neq \|\boldsymbol{w}_2\| \neq 1 \Longrightarrow \|\boldsymbol{w}_2\|^2 - \|\boldsymbol{w}_1\|^2 < 2(\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1)$ και

Αν $\|\boldsymbol{w}_1\| > \|\boldsymbol{w}_2\| \Longrightarrow 2(\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1) < 0$, δηλαδή $\boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1 < \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2$

Επομένως το κριτήριο του εσωτερικού γινομένου θα δώσει στην περίπτωση αυτή αντίθετο αποτέλεσμα επιλέγεται ως νικητής ο πρώτος νευρώνας.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα δίκτυο SOM με τέσσερις εισόδους και τρεις κόμβους εξόδου. Ρυθμός μάθησης α = 0.2.

Τα διανύσματα βαρών για τους κόμβους είναι: $\boldsymbol{w} = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 & 1 \\ 0.6 & 0.6 & 0.4 \\ 0.4 & 0.8 & 1 \\ 0.2 & 1 & 0.8 \end{bmatrix}$

Να βρεθεί ο νικητής νευρώνας για το πρότυπο εισόδου: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Θεωρώντας ως κριτήριο επιλογής του νικητή νευρώνα με

1. την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση και
2. το μέγιστο εσωτερικό γινόμενο.

Λύση

Ανταγωνισμός με την ελάχιστη ευκλείδεια απόσταση:

$d_1 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_1\|^2 = 0.33$ Νικητής ο 1ος νευρώνας

$d_2 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_2\|^2 = 1.29$

$d_3 = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{w}_3\|^2 = 1.41$

Ενημέρωση:

$$\boldsymbol{w}_{j^*i}(k+1) = \boldsymbol{w}_{j^*i}(k) + a(t) \cdot \left[\boldsymbol{x_{ki}} - \boldsymbol{w}_{j^*i}(k)\right]$$

Για $i = 1,2,3,4,\ j^* = 1,\ k = 1$ έχουμε

$$\boldsymbol{w}_{1i}(2) = \boldsymbol{w}_{1i}(1) + a(0) \cdot [\boldsymbol{x_{1i}} - \boldsymbol{w}_{1i}(1)]$$

$$\boldsymbol{w}_1(2) = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \\ 0.4 \\ 0.2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.74 \\ 0.68 \\ 0.44 \\ 0.16 \end{bmatrix}$$

Ανταγωνισμός με το μέγιστο εσωτερικό γινόμενο:

$d_1 = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_1 = 1.24$

$d_2 = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_2 = 1.18$

$d_3 = \boldsymbol{x}^T \cdot \boldsymbol{w}_3 = 1.5$ Νικητής ο 3ος νευρώνας

Ενημέρωση:

$$\boldsymbol{w}_{j^*i}(k+1) = \boldsymbol{w}_{j^*i}(k) + a(t) \cdot \left[\boldsymbol{x_{ki}} - \boldsymbol{w}_{j^*i}(k)\right]$$

Για $i = 1,2,3,4,\ j^* = 1,\ k = 1$ έχουμε

$$\boldsymbol{w}_{3i}(2) = \boldsymbol{w}_{3i}(1) + a(0) \cdot [\boldsymbol{x_{3i}} - \boldsymbol{w}_{3i}(1)]$$

$$\boldsymbol{w}_3(2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} + 0.2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \\ 0.6 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 1 \\ 0.8 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.9 \\ 0.52 \\ 0.92 \\ 0.64 \end{bmatrix}$$

Άσκηση: Θεωρούμε ένα δίκτυο kohonen με τέσσερις εισόδους και δύο εξόδους. Το δίκτυο εκπαιδεύεται με τέσσερα διανύσματα εκπαίδευσης:

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3\ \boldsymbol{x}_4] = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & x_{31} & x_{41} \\ x_{12} & x_{22} & x_{32} & x_{42} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} & x_{43} \\ x_{14} & x_{24} & x_{34} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Τα αρχικά βάρη του δικτύου που ενώνουν τις εισόδους με τις εξόδους είναι:

$$\boldsymbol{w}(1) = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \\ w_{13} & w_{23} \\ w_{14} & w_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.5 & 0.7 \\ 0.9 & 0.3 \end{bmatrix}$$

$a(0) = 0.6$, $\alpha(t) = \frac{a(t-1)}{2}$, Ακτίνα της γειτονιάς $r = 0$

Υπολογίστε τις νέες τιμές των συναπτικών βαρών κατά τη διάρκεια του πρώτου κύκλου εκπαίδευσης (εποχής).

Λύση

1η Εποχή (t = 0): Πλήρης επανάληψη όλων των προτύπων k=1,…,4

1. $$d_j(k) = \|\boldsymbol{w} - \boldsymbol{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(x_{ki} - w_{ji}\right)^2$$

$$k = 1:\ d_1(1) = 1.86, d_2(1) \ = 0.98$$

2. $d_{j^*} = \min_j d_j(k), j = 1,2$

Νικητής είναι ο δεύτερος νευρώνας, έτσι αλλάζουν τα βάρη του σύμφωνα με τον κανόνα του kohonen.

3. $\boldsymbol{w}_{2i}(k+1) = \boldsymbol{w}_{2i}(k) + a(t=0) \cdot [\boldsymbol{x_{ki}} - \boldsymbol{w}_{2i}(k)], i = 1,2,3,4$

$$\boldsymbol{w}_{2i}(1) = \begin{bmatrix} w_{21}^{new} \\ w_{22}^{new} \\ w_{23}^{new} \\ w_{24}^{new} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.4 \\ 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} + 0.6 \cdot \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.6 \\ -0.7 \\ -0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.92 \\ 0.76 \\ 0.32 \\ 0.12 \end{bmatrix}$$

Τα βάρη $\mathbf{w}_{1i}$ του 1ου νευρώνα παραμένουν αναλλοίωτα.

2η Εποχή (t = 1): Πλήρης επανάληψη όλων των προτύπων

Νέος ρυθμός μάθησης: $a(1) = \dfrac{a(0)}{2} = 0.3$

100η Εποχή (t = 99): Πλήρης επανάληψη όλων των προτύπων με αποτέλεσμα να έχουμε περίπου Δw = 0.

$$\begin{bmatrix} w_{11} & w_{21} \\ w_{12} & w_{22} \\ w_{13} & w_{23} \\ w_{14} & w_{24} \end{bmatrix} = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} \text{Cluster 1} & \text{Cluster 2} \end{array} \end{array}$$

Πρότυπα εκπαίδευσης	x_{l1}	x_{l2}	x_{l3}	x_{l4}	**Cluster**
(k=1)	1	1	0	0	2
(k=2)	0	0	0	1	1
(k=3)	1	0	0	0	2
(k=4)	0	0	1	1	1

Άσκηση

Θεωρείστε ένα δίκτυο kohonen με τρεις εισόδους και δύο νευρώνες kohonen. Υπάρχουν συνδέσεις μόνο μεταξύ εισόδων και των νευρώνων kohonen.

Το δίκτυο εκπαιδεύεται με τα ακόλουθα τέσσερα διανύσματα: $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3\ \boldsymbol{x}_4] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0.3 & 0.1 \\ 0.7 & 0.9 & 0.4 & 0.1 \\ 0.4 & 0.9 & 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}$

Τα αρχικά βάρη είναι: $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{1}) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 \\ 0.8 & 0.5 \end{bmatrix}$

Θεωρούμε ότι η ακτίνα της γειτονιάς είναι r = 0 και ο ρυθμός μάθησης είναι 0.5.

Υπολογίστε τα νέα βάρη μετά από ένα κύκλο εκπαίδευσης.

Απάντηση

1ο διάνυσμα εκπαίδευσης, τα νέα βάρη είναι: $\boldsymbol{w}(2) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 0.65 & 0.4 \\ 0.65 & 0.2 \\ 0.6 & 0.5 \end{bmatrix}$

2ο διάνυσμα εκπαίδευσης, τα νέα βάρη είναι: $\boldsymbol{w}(3) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.4 \\ 0.775 & 0.2 \\ 0.750 & 0.5 \end{bmatrix}$

3ο διάνυσμα εκπαίδευσης, τα νέα βάρη είναι: $\boldsymbol{w}(4) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.35 \\ 0.775 & 0.30 \\ 0.750 & 0.30 \end{bmatrix}$

4ο διάνυσμα εκπαίδευσης, τα νέα βάρη είναι: $\boldsymbol{w}(\text{τελικό}) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2] = \begin{bmatrix} 0.625 & 0.225 \\ 0.775 & 0.2 \\ 0.750 & 0.3 \end{bmatrix}$

Άσκηση

Θεωρείστε ένα δίκτυο kohonen που χρησιμοποιείται για συσταδοποίηση τεσσάρων διανυσνάτων. Ο μέγιστος αριθμός συστάδων είναι τρεις.

Το δίκτυο εκπαιδεύεται με τα ακόλουθα τέσσερα διανύσματα: $\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{x}_1\ \boldsymbol{x}_2\ \boldsymbol{x}_3\ \boldsymbol{x}_4] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Τα αρχικά βάρη είναι: $\boldsymbol{w}(1) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

Θεωρούμε ότι η ακτίνα της γειτονιάς είναι r = 0 και ο ρυθμός μάθησης είναι 0.3. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μάθησης μειώνεται γεωμετρικά: $\alpha(t) = 0.2a(t)$

Υπολογίστε τα νέα βάρη μετά από ένα κύκλο εκπαίδευσης.

Απάντηση

$1^{η}$ εποχή: r = 0, α(0)=0.3

$1^{ο}$ διάνυσμα εκπαίδευσης $\boldsymbol{w}(2) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.4 & 0.1 \\ 0.51 & 0.2 & 0.2 \\ 0.65 & 0.3 & 0.5 \\ 0.37 & 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$

$2^{ο}$ διάνυσμα εκπαίδευσης $\boldsymbol{w}(3) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.28 & 0.1 \\ 0.51 & 0.14 & 0.2 \\ 0.65 & 0.21 & 0.5 \\ 0.37 & 0.37 & 0.1 \end{bmatrix}$

$3^{ο}$ διάνυσμα εκπαίδευσης $\boldsymbol{w}(4) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 0.608 & 0.28 & 0.1 \\ 0.657 & 0.14 & 0.2 \\ 0.455 & 0.21 & 0.5 \\ 0.259 & 0.37 & 0.1 \end{bmatrix}$

$4^{ο}$ διάνυσμα εκπαίδευσης $\boldsymbol{w}(\text{τελικό}) = [\boldsymbol{w}_1\ \boldsymbol{w}_2\ \boldsymbol{w}_3] = \begin{bmatrix} 0.608 & 0.28 & 0.07 \\ 0.657 & 0.14 & 0.14 \\ 0.455 & 0.21 & 0.65 \\ 0.259 & 0.37 & 0.37 \end{bmatrix}$

$2^{η}$ εποχή: r = 0, α(1) = 0.06

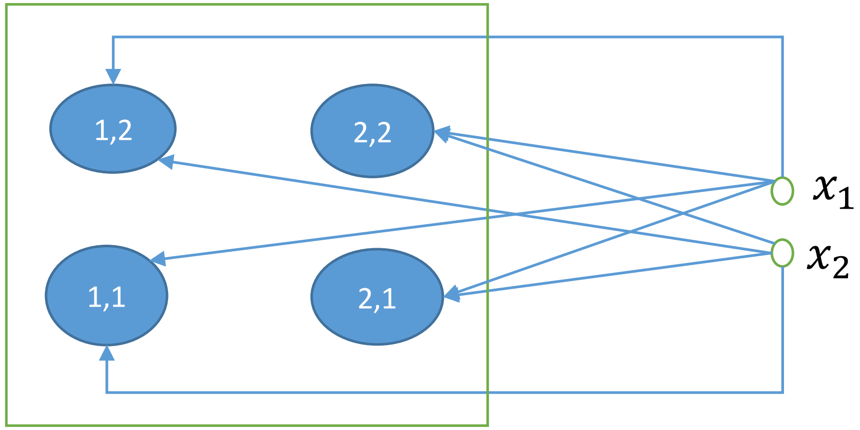
Άσκηση

Έστω ένα δίκτυο SOM με δύο εισόδους και τέσσερις ανταγωνιστικούς νευρώνες σε ορθογώνιο πλέγμα 2x2. Η ακτίνα της γειτονιάς είναι r = 1.

Θεωρούμε ότι ο ρυθμός μάθησης είναι 0.5. Υποθέτουμε ότι ο ρυθμός μάθησης για τους νευρώνες της γειτονιάς του νικητή είναι 0.25.

Δεδομένα εισόδων: $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}$

Αρχικές τιμές βαρών: $\boldsymbol{w}(1) = [\boldsymbol{w}_{11}\ \boldsymbol{w}_{12}\ \boldsymbol{w}_{21} \boldsymbol{w}_{22}] = \begin{bmatrix} w_{111} & w_{121} & w_{211} & w_{221} \\ w_{112} & w_{122} & w_{212} & w_{222} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 & 0.8 & 0.9 \\ 0.3 & 0.7 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$



Υπολογίστε τα νέα βάρη μετά από ένα κύκλο εκπαίδευσης.

Νευρώνας (1,1): $d_{11} = 0.05$

Νευρώνας (1,2): $d_{12} = 0.45$

Νευρώνας (2,1): $d_{21} = 0.49$

Νευρώνας (2,2): $d_{11} = 1.13$

Ο νικητής νευρώνας είναι ο (1,1) και η γειτονιά του είναι οι νευρώνες (1,2) και (2,1).

$$\boldsymbol{w}(\text{τελικό}) = \begin{bmatrix} 0.15 & 0.325 & 0.625 & 0.9 \\ 0.2 & 0.55 & 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}$$

Υπολογιστική Νοημοσύνη
Εξελικτική Βελτιστοποίηση
Γενετικοί Αλγόριθμοι

Αναστάσιος Ντούνης, Καθηγητής

Εργαστήριο Υπολογιστικής Νοημοσύνης – Ευφυούς Ελέγχου
Τμήμα Βιομηχανικής Σχεδίασης και Παραγωγής
Σχολή Μηχανικών
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής

Εκπαιδευτικές διαλέξεις

Περίγραμμα των διαλέξεων

- Εξελικτική θεωρία του Δαρβίνου
- Προσομοιωμένη εξέλιξη
- Εξελικτικοί αλγόριθμοι
- Γενετικοί Αλγόριθμοι
- Παραδείγματα εφαρμογής ΓΑ
- Επίλυση προβλημάτων βελτιστοποίησης με ΓΑ
- Εφαρμογές των ΓΑ

Το κλασικό μαθηματικό πρόβλημα της βελτιστοποίησης

Τι είναι βελτιστοποίηση;

Η διαδικασία εύρεσης της καλύτερης ή μιας ικανοποιητικά καλής λύσης σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα με το καλύτερο δυνατό τρόπο.

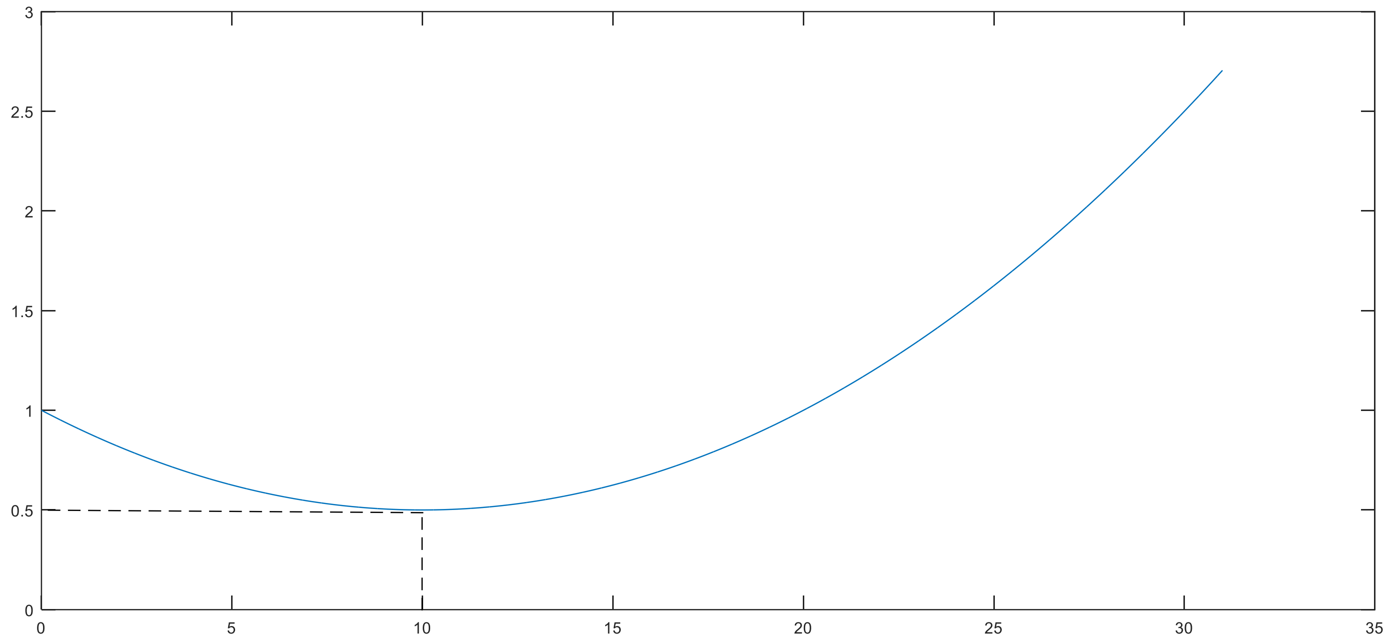
Βασικά στοιχεία διαμόρφωσης ενός προβλήματος βελτιστοποίησης

Στη διαμόρφωση ενός προβλήματος βελτιστοποίησης περιλαμβάνεται ο καθορισμός τεσσάρων βασικών στοιχείων:

1. **Χώρος εφικτών λύσεων ή χώρος αναζήτησης**
2. **Παράμετροι** ή **μεταβλητές ελέγχου** του συστήματος.
3. **Περιορισμοί** (constraints). Οι παράμετροι του συστήματος υφίστανται περιορισμούς όσον αφορά τις επιτρεπτές τιμές τους.
4. **Αντικειμενική συνάρτηση** (objective function). Η αντικειμενική συνάρτηση καθορίζει το μέτρο της αποτελεσματικότητας του συστήματος και είναι μια μαθηματική έκφραση των παραμέτρων του συστήματος. Η βέλτιστη λύση επιτυγχάνεται όταν οι τιμές των παραμέτρων οδηγούν στη βέλτιστη τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης ικανοποιώντας ταυτόχρονα και τους περιορισμούς.

Ένα **εύκολο** πρόβλημα υπολογισμού του ελαχίστου μιας συνάρτησης

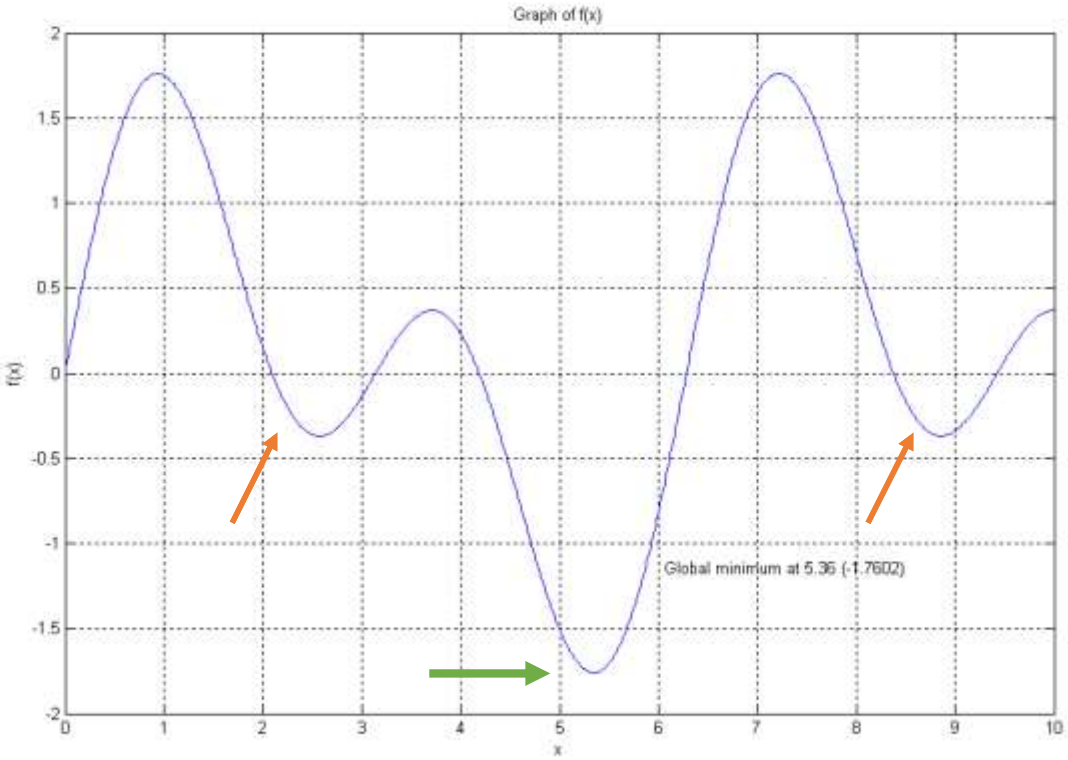
$$y(x) = 1 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{200}x^2 \qquad 0 \le x \le 31$$



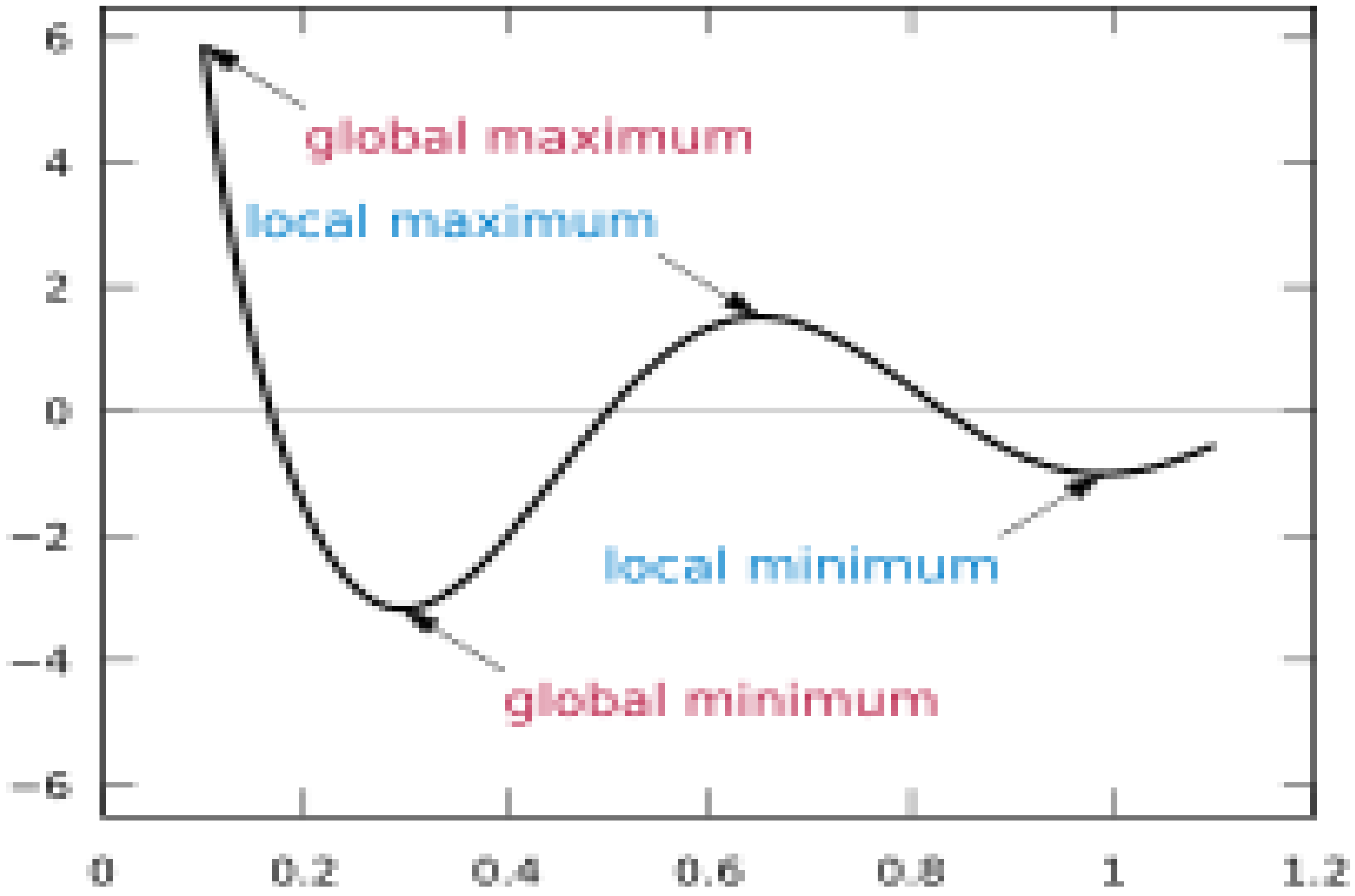
Το ελάχιστο της συνάρτησης είναι 0.5 στο σημείο με τετμημένη 10

Ένα πιο δύσκολο πρόβλημα υπολογισμού του ελαχίστου μιας συνάρτησης

$$f(x) = \sin(x) + \sin(2x)$$

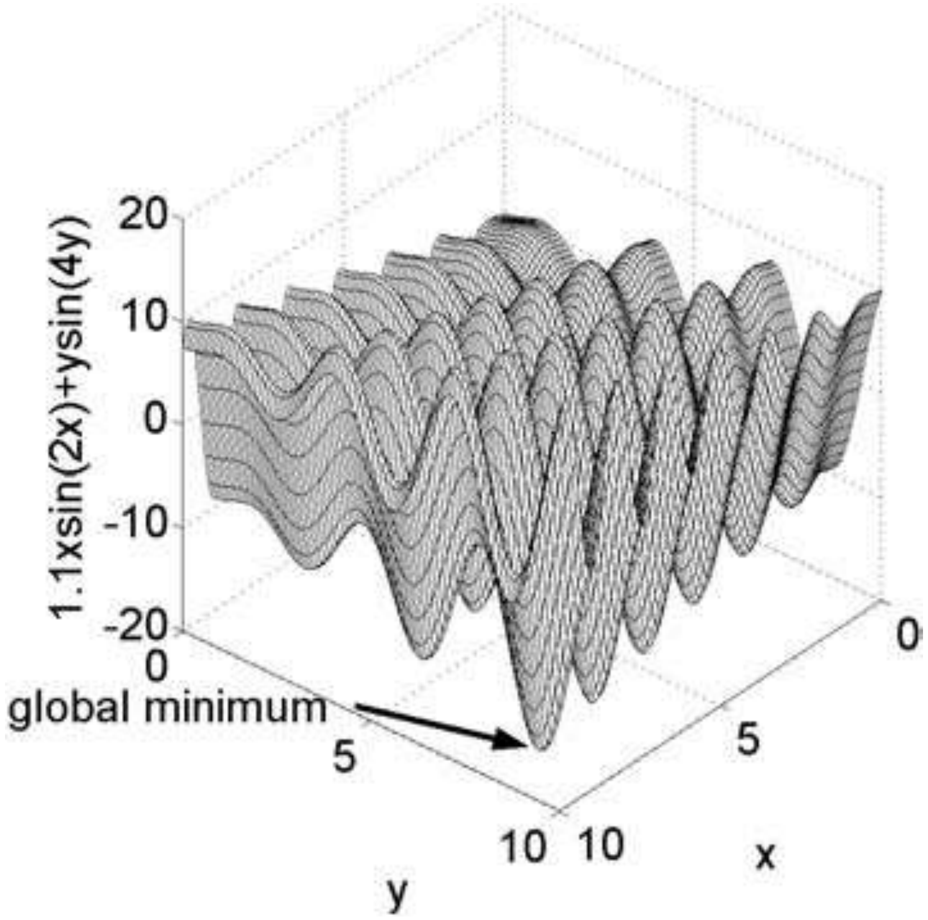


Οπως μπορούμε να δούμε από την γραφική παράσταση, η συνάρτηση *f(x)* παρουσιάζει δύο *τοπικά ελάχιστα* και ένα *ολικό ελάχιστο* στο σημείο 5.36 με τιμή –1.7602.

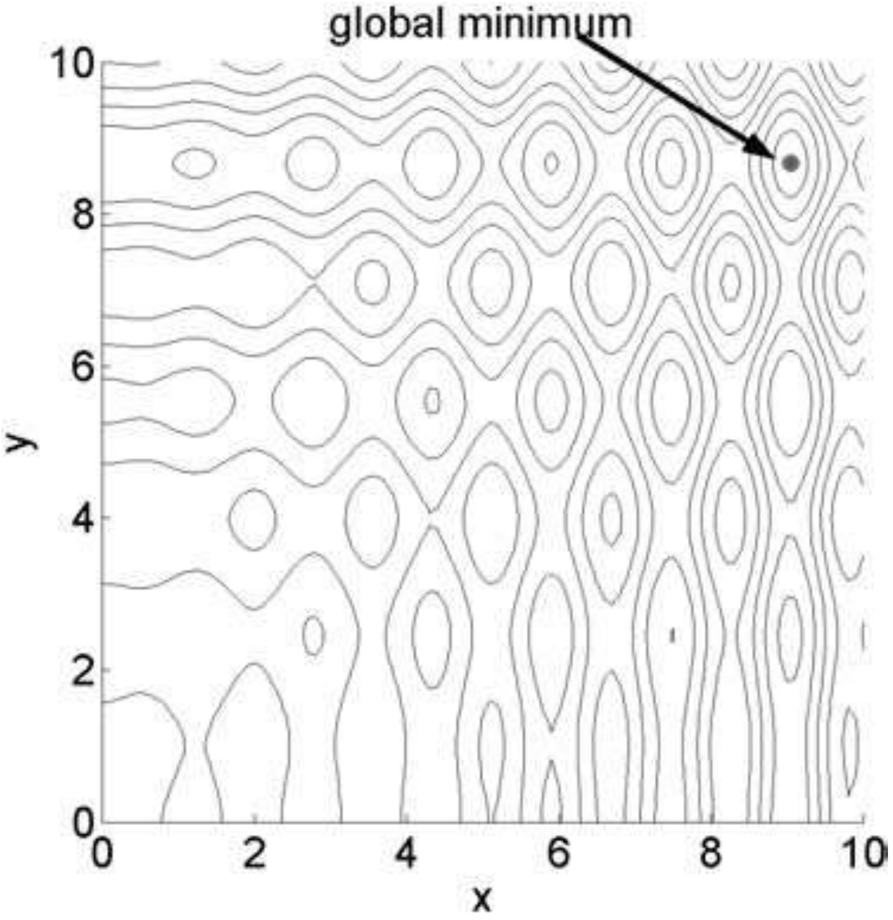


global maximum
local maximum
local minimum
global minimum
6
4
2
0
−2
−4
−6
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2

Ένα δύσκολο πρόβλημα υπολογισμού του ελαχίστου μιας συνάρτησης

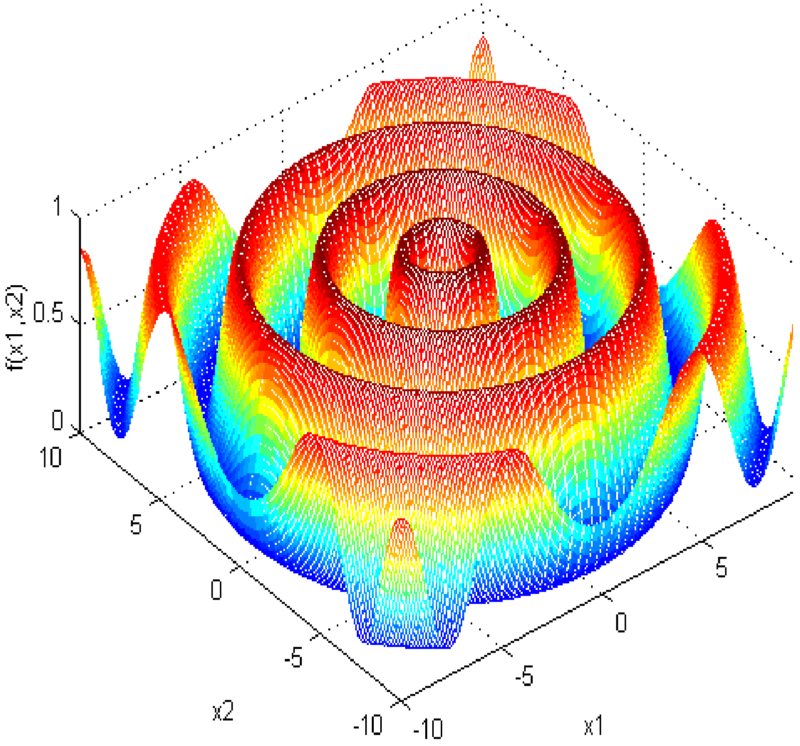


Ελάχιστη τιμή της συνάρτησης: -18.5547
στο σημείο (9.039, 8.668)

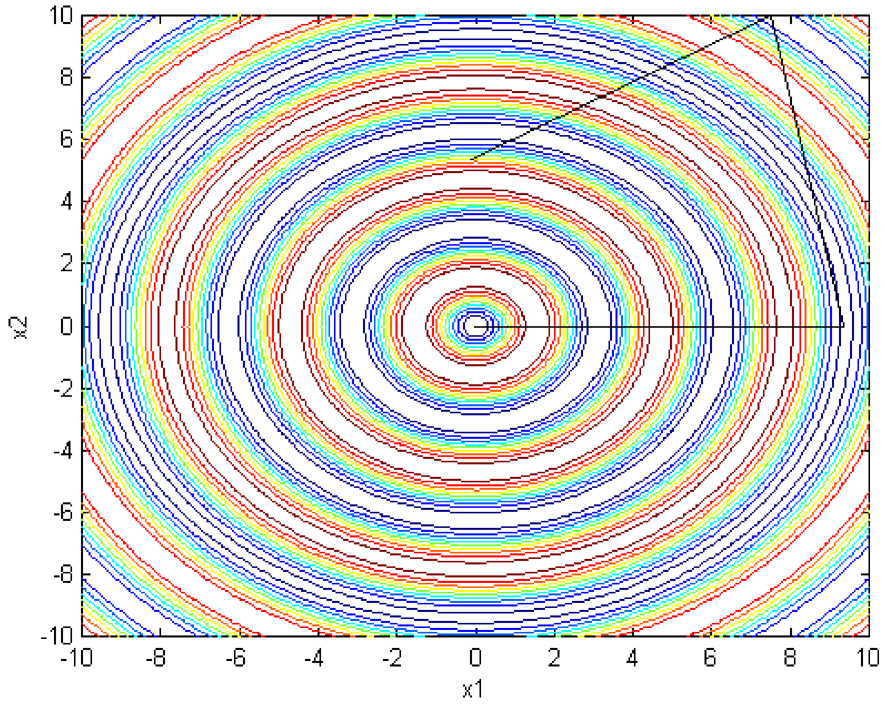


Το διάγραμμα των ισοϋψών

$$y(x_1,x_2)=0.5+\frac{\sin^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}-0.5}{[1.0+0.001\cdot(x_1^2+x_2^2)]^2},-10\leq x\leq 10$$



Η συνάρτηση έχει ένα καθολικό ελάχιστο ίσο με 0, στο σημείο $(x_1,x_2)=(0,0)$



Το διάγραμμα των ισοϋψών

Εξελικτική θεωρία του Δαρβίνου

Φυσική εξέλιξη (Natural evolution) είναι μια διαδικασία βελτιστοποίησης βασιζόμενη σε έναν πληθυσμό.
Αποτελεί μια εύρωστη και αποτελεσματική τεχνική για την επίλυση δύσκολων προβλημάτων.

Η φυσική εξέλιξη βασίζεται στη:

Δαρβίνια αρχή της φυσικής επιλογής

δηλαδή στην επικράτηση του ισχυρότερου (Survival of the fittest).

Προσομοιωμένη εξέλιξη (Simulated evolution)

Τι είναι η εξέλιξη;

- Εξέλιξη δεν είναι μια δύναμη αλλά μια διαδικασία. Το πιο ξεκάθαρο χαρακτηριστικό αυτής της διαδικασίας είναι η συσσώρευση όλο και περισσότερο κατάλληλων συμπεριφορών μέσα σε μια εξελισσόμενη γενεαλογία δοκιμών.
- Η Δαρβίνια εξέλιξη είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης (optimization algorithm). Η εξέλιξη δεν είναι μια θεωρία πρόβλεψης ούτε μια ταυτολογία. Στις περισσότερες διαδικασίες βελτιστοποίησης το σημείο ή τα σημεία λύσης ανακαλύπτονται με τη μέθοδο αναζήτησης «trial and error».
- Εξέλιξη είναι μια διαδικασία βελτιστοποίησης που μπορεί να προσομοιωθεί σ’ έναν υπολογιστή και να χρησιμοποιηθεί για τεχνολογικούς σκοπούς.

Τι είναι η προσομοιωμένη εξέλιξη;

- ✓ Η προσομοιωμένη εξέλιξη είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης.
- ✓ Ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης ονομάζεται και βελτιστοποιητής (optimizer).
- ✓ Ένας εξελικτικός αλγόριθμος (Evolutionary Algorithm) (EA) είναι ένας αλγόριθμος βελτιστοποίησης.

Εξελικτικοί Αλγόριθμοι

Οι ΕΑ είναι τομέας της Υπολογιστικής Νοημοσύνης

Ο Εξελικτικός Υπολογισμός (Evolutionary Computation) είναι ένας τομέας της Υπολογιστικής Νοημοσύνης (Computational Intelligence).

Ο τομέας του εξελικτικού υπολογισμού εμπεριέχει μια κατηγορία στοχαστικών αλγορίθμων βελτιστοποίησης που ονομάζονται Εξελικτικοί Αλγόριθμοι (ΕΑ).

Ποιοι αλγόριθμοι ανήκουν στους ΕΑ;

Στην οικογένεια των ΕΑ περιλαμβάνονται οι στοχαστικοί αλγόριθμοι:

- Γενετικοί Αλγόριθμοι – ΓΑ (Genetic Algorithms)
- Εξελικτικές Στρατηγικές
  (Παραμετρική βελτιστοποίηση)
- Γενετικός Προγραμματισμός
  (Εξέλιξη προγράμματος υπολογιστή, αλγόριθμοι και λογικές εκφράσεις)
- Εξελικτικός Προγραμματισμός
  (Εξέλιξη μηχανών πεπερασμένων καταστάσεων)

Ο εξελικτικός αλγόριθμος:

1. Είναι γενικός και αξιοποιείται σε πολλά προβλήματα.
2. Εξελίσσει ένα πληθυσμό υποψήφιων λύσεων.
3. Είναι στοχαστικός επειδή χρησιμοποιεί πιθανοτικούς (όχι αιτιοκρατικούς) κανόνες και τελεστές.
4. Χρησιμοποιεί αρχές εμπνευσμένες από τη βιολογική εξέλιξη.
5. Αξιοποιείται για τη λύση στατικών και δυναμικών προβλημάτων.

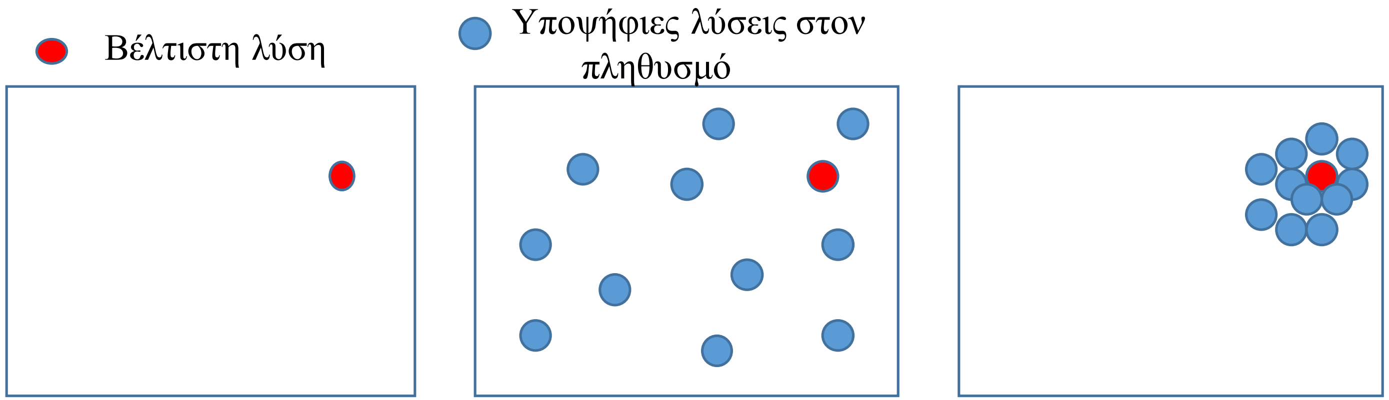
Είσοδος και έξοδος ενός ΕΑ

Τι είδους προβλήματα αντιμετωπίζουν οι ΕΑ

- Στατικά προβλήματα
- Δυναμικά προβλήματα

Στατικά προβλήματα

Οι ΕΑ εστιάζονται παραδοσιακά σε στατικά προβλήματα, δηλαδή σε προβλήματα των οποίων η βέλτιστη λύση δεν αλλάζει με το χρόνο.



Χώρος αναζήτησης

Χώρος αναζήτησης (αρχικός πληθυσμός)

Χώρος αναζήτησης (ο πληθυσμός συγκλίνει τη χρονική στιγμή t)

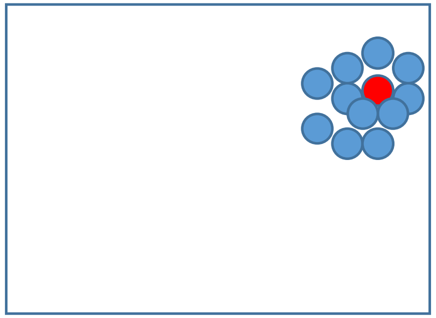
Δυναμικά προβλήματα

Πολλά πραγματικά προβλήματα απαιτούν δυναμική βελτιστοποίηση μια και η βέλτιστη λύση τους αλλάζει με το χρόνο. Ενισχυμένοι ΕΑ είναι καλές επιλογές σε τέτοιες περιπτώσεις.

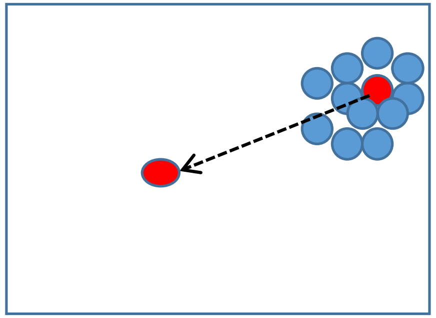
- Logistics, οι απαιτήσεις καταναλωτών μπορούν να αλλάξουν
- Δίκτυα μεταφορών, ο χρόνος ταξιδιού μεταξύ των κόμβων μπορεί να αλλάξει
- …

Δυναμικά προβλήματα

Η χρονική εξέλιξη ενός δυναμικού προβλήματος. Η βέλτιστη λύση αλλάζει χρονικά



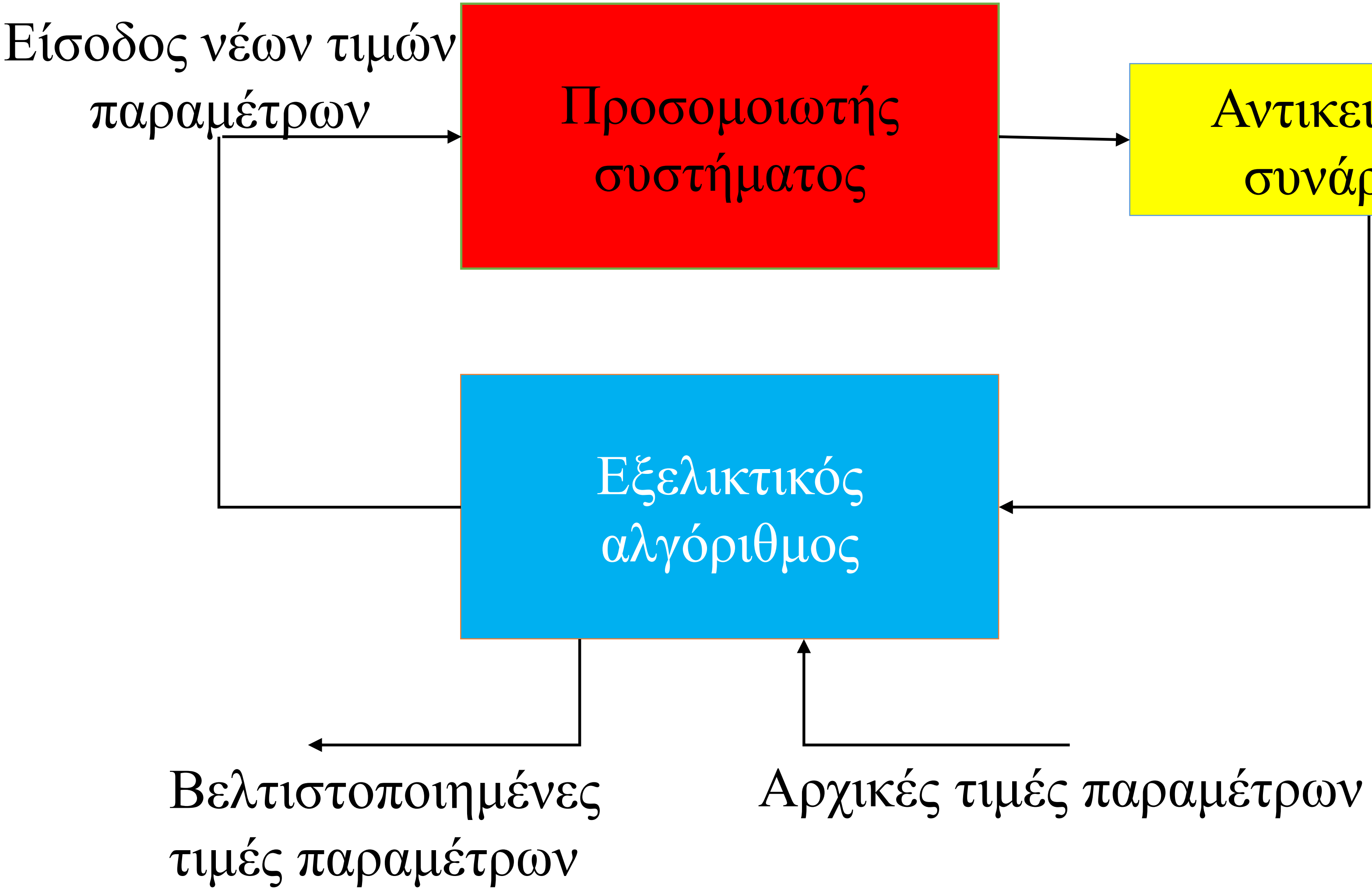
Χώρος αναζήτησης (ο πληθυσμός συγκλίνει τη χρονική στιγμή t)



Χώρος αναζήτησης (η βέλτιστη λύση μετακινήθηκε τη χρονική στιγμή t+1)

Εξελικτική βελτιστοποίηση σε επιστημονικά και τεχνολογικά προβλήματα

Κύκλος-διάγραμμα βελτιστοποίησης παραμέτρων συστήματος



Εξελικτική Βελτιστοποίηση

- Τι δυσκολεύει τη βελτιστοποίηση των προβλημάτων;
- Βιολογικό πρότυπο και εξελικτικός αλγόριθμος.
- Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα των ΕΑ.

Τι δυσκολεύει τη βελτιστοποίηση των προβλημάτων;

- Ο αριθμός των λύσεων να είναι πολύ μεγάλος
- Η αξιολόγηση των λύσεων μπορεί να είναι χρονοβόρα, ακριβή, επικίνδυνη ή και υποκειμενική
- Οι εφικτές λύσεις να είναι ελάχιστες
- Το πρόβλημα μπορεί να είναι μη-γραμμικό, διακριτό, ασυνεχές, με πολλαπλά ακρότατα κ.α.

- Το πρόβλημα μπορεί να είναι ιεραρχικό (πολύ-επίπεδη βελτιστοποίηση)
- Απαίτηση πολλαπλών λύσεων
- Η δομή του προβλήματος να είναι άγνωστη
- Αντικρουόμενοι στόχοι (multiobjective optimization)
- Το πρόβλημα μπορεί να είναι χρονικά μεταβαλλόμενο (δυναμική βελτιστοποίηση)
- Το πρόβλημα μπορεί να είναι NP-complete, δηλαδή δεν μπορεί να επιλυθεί από κάποιο αιτιοκρατικό αλγόριθμο σε πολυωνυμικό χρόνο αλλά να μπορεί να επιλυθεί από μη-αιτιοκρατικό αλγόριθμο σε πολυωνυμικό χρόνο.

Βιολογικό πρότυπο και εξελικτικός αλγόριθμος

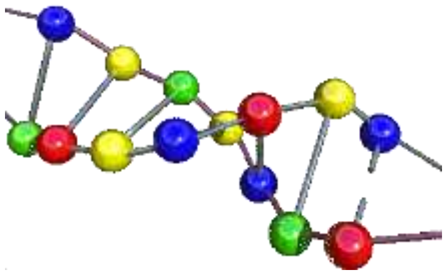
Βιολογική εξέλιξη →	**Προσομοιωμένη εξέλιξη για την επίλυση του προβλήματος**
Άτομα →	Υποψήφιες λύσεις
Περιβάλλον →	Πρόβλημα
Καταλληλότητα →	Ποιότητα λύσης

Πλεονεκτήματα των EA

- Απλότητα
- Μεθοδολογίες βελτιστοποίησης γενικού σκοπού
- Απαιτείται μόνο η αξιολόγηση των λύσεων
- Παράγουν εναλλακτικές λύσεις
- Ικανότητα συνταιριάσματος με άλλες μεθόδους (υβριδισμός)
- Παραλληλισμός
- Επιτυχής εφαρμογή στην πράξη
- Υψηλή απόδοση

Μειονεκτήματα των ΕΑ

- Υπο-βέλτιστες μεθοδολογίες: δεν εγγυώνται για ποιοτική λύση.
- Υπολογιστικό φορτίο.
- Ανάγκη ρύθμισης των παραμέτρων του αλγορίθμου.



Γενετικοί Αλγόριθμοι

Η αρχή των ΓΑ (βασική ιδέα)

Οι ΓΑ προέκυψαν από τις μελέτες των κυψελιδωτών αυτομάτων που πραγματοποιήθηκαν από τον J. Holland το 1975, στο Πανεπιστήμιο του Michigan.

Με το βιβλίο του "Adaptation in Natural and Artificial Systems" έθεσε τις βάσεις για την νέα τεχνική του Εξελικτικού Υπολογισμού.

Διδακτικά βιβλία

1. Zbigniew Michalewicz
Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs
Springer-Verlag, 1999.

2. David E. Goldberg
Genetic Algorithms in search, optimization & machine learning
Addison-Wesley, 1989.

Τι είναι οι ΓΑ;

Οι ΓΑ είναι στοχαστικοί αλγόριθμοι αναζήτησης γενικού σκοπού οι οποίες καταφέρνουν μια αξιοσημείωτη ισορροπία μεταξύ της εξερεύνησης στη γειτονιά της βέλτιστης λύσης (exploitation) και της αξιοποίησης μιας στοχευμένης αναζήτησης/διερεύνησης στον ευρύτερο χώρο (exploration) των εφικτών λύσεων του προβλήματος.

Πού βασίζονται οι ΓΑ;

Οι ΓΑ βασίζονται στη θεμελιώδη αρχή της εξέλιξης:

"Η επικράτηση του δυνατότερου"

Τι είδους προβλήματα βελτιστοποίησης αντιμετωπίζουν οι ΓΑ;

- **Προβλήματα βελτιστοποίησης απουσία περιορισμών**

Τέτοιου είδους προβλήματα εμφανίζονται συχνά σε θέματα αναγνώρισης συστημάτων, όπου ο αντικειμενικός στόχος είναι ο προσδιορισμός του μοντέλου του συστήματος από μετρήσεις εισόδου-εξόδου.

- **Προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς**

Οι περιορισμοί στους οποίους υπόκεινται το πρόβλημα αποτελούν τις προδιαγραφές ή και τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν οι λύσεις.

Ορολογία-1

- **Χρωμοσώματα** (chromosomes) ή **άτομα** (individuals) ή **γονότυποι** (genotypes) ή **εκπρόσωποι** (agents) ή **αλυσίδες** (strings) ή **σημεία** (points): Αναφέρονται σε υποψήφιες λύσεις του προβλήματος, οι οποίες κωδικοποιούνται συνήθως με ακολουθίες από bits.
- **Γονίδια** (genes): Είναι είτε απλά bits ή μικρές αλυσίδες γειτονικών ψηφίων που συνδέονται για να διαμορφώσουν ένα χρωμόσωμα ή μια παράμετρο.
- **Κωδικοποίηση** (encoding) χρωμοσώματος.
- **Πληθυσμός** (population): το σύνολο των χρωμοσωμάτων/υποψήφιων λύσεων.
- **Διασταύρωση** (crossover) ή **ανασυνδιασμός** (recombination): Συνίσταται τυπικά στην ανταλλαγή γενετικού υλικού μεταξύ δυο χρωμοσωμάτων (γονέων)/σύνθεση λύσεων.
  <u>Τελεστής διασταύρωσης</u>: Διασταύρωση σε ένα ή περισσότερα σημεία.
  <u>Ρυθμός διασταύρωσης</u>: Η πιθανότητα διασταύρωσης.

Ορολογία-2

- **Μετάλλαξη** (mutation): Ο τελεστής της μετάλλαξης συνίσταται στην αλλαγή του δυαδικού ψηφίου μιας τυχαίας επιλεγείσας θέσης στο χρωμόσωμα του απογόνου.
- **Φαινότυπος** (phenotype): Ορίζεται εξωτερικά από το χρήστη, είναι ουσιαστικά η αποκωδικοποιημένη πληροφορία του χρωμοσώματος (ακέραιοι αριθμοί).
- **Συνάρτηση προσαρμογής ή καταλληλότητας** (fitness function): Αντανακλά το πόσο ¨καλό¨ είναι το χρωμόσωμα για το πρόβλημα/πιθανότητα επιβίωσης. Συνήθως το ζητούμενο είναι η μεγιστοποίησή της.
- **Επιλογή/Διαλογή** (selection): Διαδικασία δημιουργίας του νέου πληθυσμού (γονείς) σύμφωνα με την πυκνότητα πιθανότητας που δίνει η συνάρτηση καταλληλότητας.
- **Αναπαράσταση** (representation): Η κωδικοποίηση της τιμής μιας μεταβλητής /μεταβλητών σε ένα χρωμόσωμα διάνυσμα.

Ορολογία-3

- **Αναπαραγωγή** (reproduction): Η διαδικασία κατά την οποία επιλέγεται το ζευγάρωμα για την επόμενη γενιά. Τα άτομα αντιγράφονται στη δεξαμενή ζευγαρώματος σύμφωνα με τις τιμές της συνάρτησης καταλληλότητας.
- **Γενιά** (generation): Ο κύκλος της εξελικτικής διαδικασίας, ανακύκλωση.
- **Γονείς** (parents): Τα άτομα που υφίστανται ανασυνδυασμό και μετάλλαξη.
- **Απόγονοι** (offspring): Οι νέες λύσεις.
- **Αντικειμενική συνάρτηση ή συνάρτηση κόστους** (objective function or cost function): Η συνάρτηση της οποίας η τιμή της θέλουμε να είναι η βέλτιστη δυνατή. Στα Οικονομικά η συνάρτηση κόστους μπορεί να αντιστοιχεί σε χρήματα, φυσικούς πόρους, ανθρωποώρες κλπ. οπότε συνήθως θέλουμε την ελαχιστοποίησή της. Στη Φυσική η συνάρτηση κόστους μπορεί να αντιστοιχεί σε δυναμική ή κινητική ενέργεια οπότε ονομάζεται και **συνάρτηση ενέργειας**.

Αναλογία βιολογικού προτύπου με το γενετικό αλγόριθμο

Βιολογικό πρότυπο	Γενετικοί αλγόριθμοι
Γονίδιο	Παράμετρος (μεταβλητή)
Χρωμόσωμα	Υποψήφια λύση (συμβολοσειρά)
Πληθυσμός	Σύνολο υποψήφιων λύσεων
Πιθανότητα επιβίωσης	Συνάρτηση βελτιστοποίησης
Μετάλλαξη	Τυχαία αναζήτηση λύσης
Διασταύρωση	Σύνθεση λύσεων
Γενιά	Ανακύκλωση

Κύρια στοιχεία των ΓΑ

1. Μια γενική παράσταση των δυναμικών λύσεων του προβλήματος.
2. Δημιουργία ενός αρχικού πληθυσμού λύσεων.
3. Μια συνάρτηση αξιολόγησης, που παίζει το ρόλο του περιβάλλοντος, αξιολογεί τις πιθανές λύσεις σύμφωνα με την καταλληλότητά τους.
4. Γενετικοί τελεστές (διαλογή / αναπαραγωγή, διασταύρωση, μετάλλαξη) που δημιουργούν νέες υποψήφιες λύσεις.
5. Η διασταύρωση και η μετάλλαξη παρέχουν exploration ενώ η διαλογή παρέχει exploitation.
6. Τιμές των παραμέτρων που οι ΓΑ χρησιμοποιούν (μέγεθος πληθυσμού, πιθανότητες εφαρμογής γενετικών τελεστών).

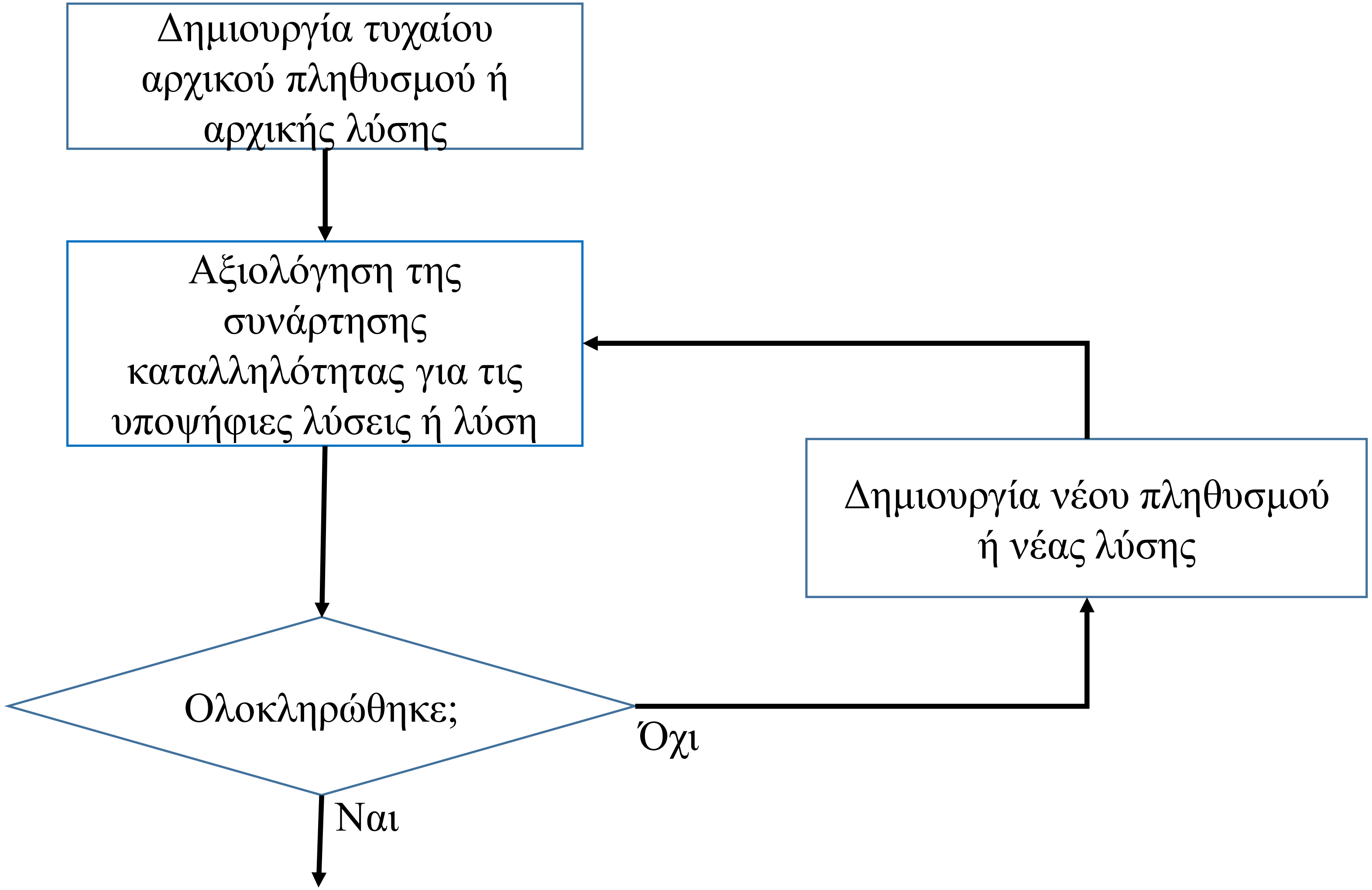
Τα βασικά βήματα των ΓΑ

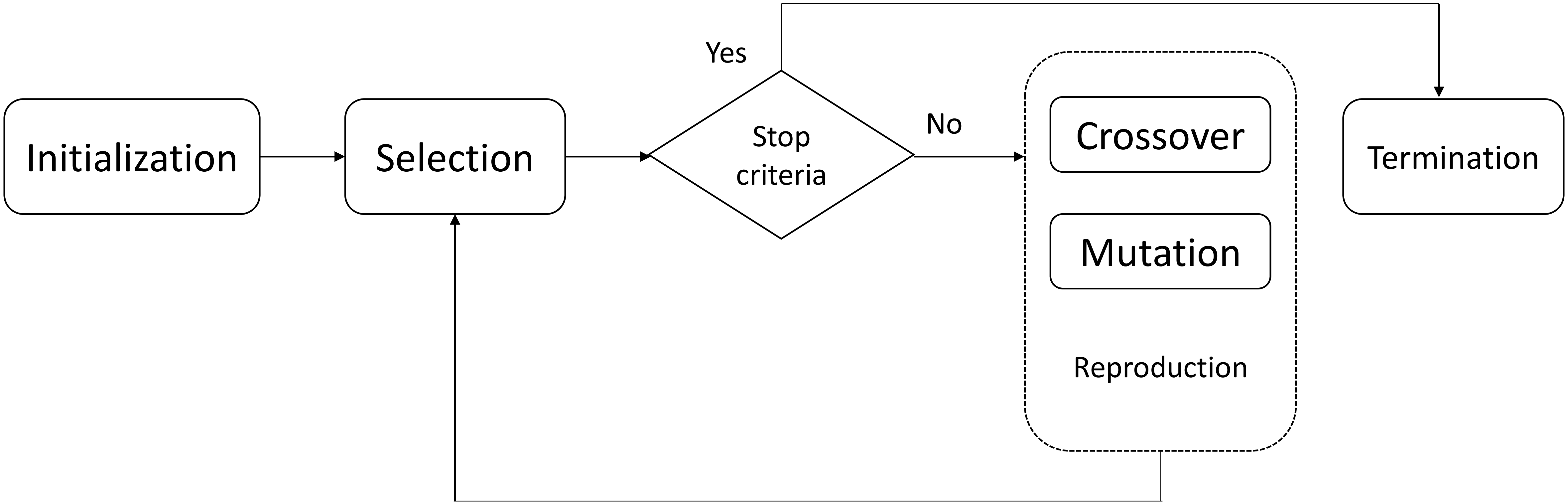
I. Διατηρούν ένα σταθερό μέγεθος πληθυσμού **P(t)**, των υποψήφιων λύσεων, που καλούνται **χρωμοσώματα**, ή **άτομα** ή **γονότυποι**. Ο κάθε πληθυσμός που προκύπτει καλείται **γενιά**.

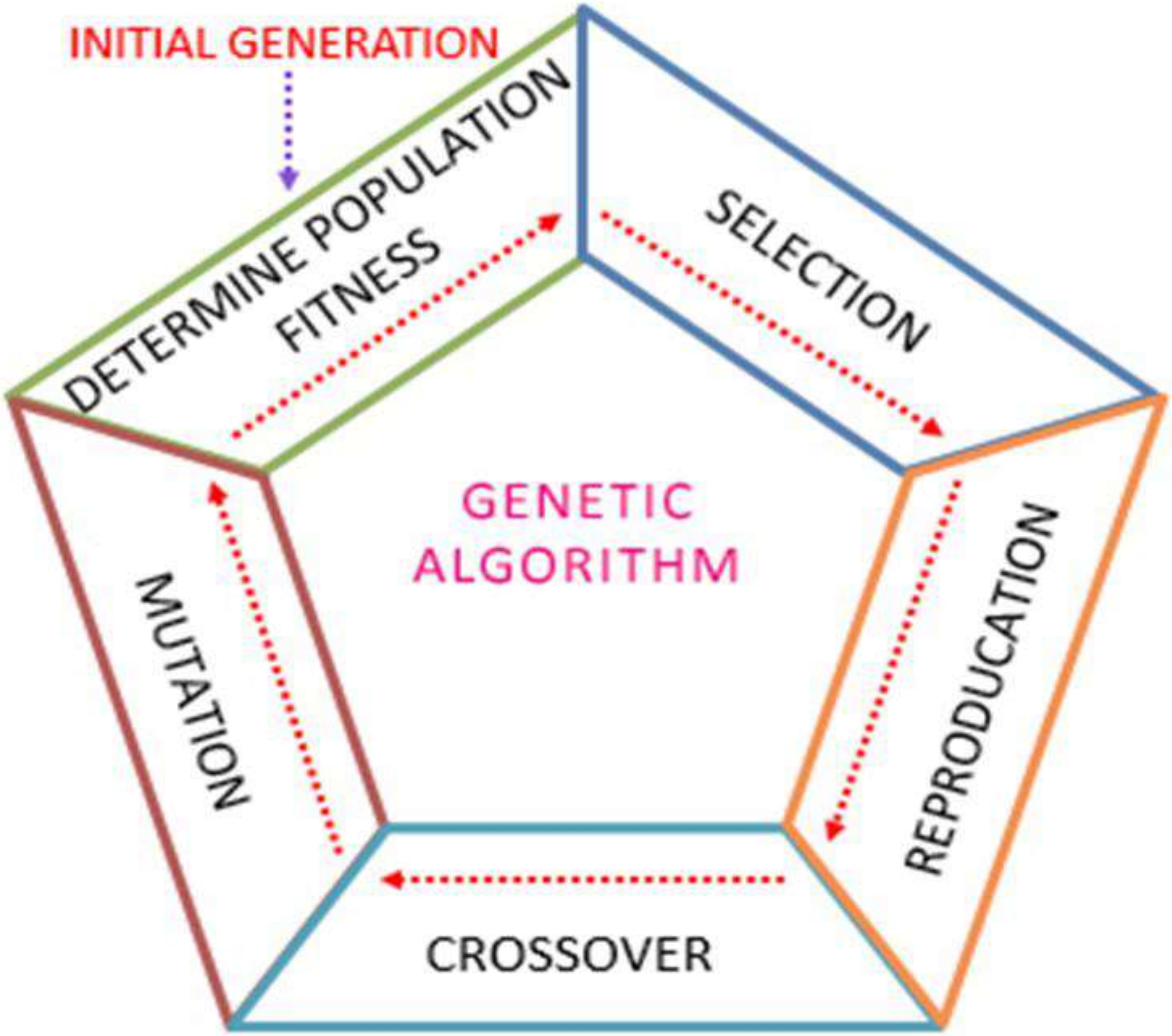
II. Εφαρμόζουν στον πληθυσμό τους παρακάτω τελεστές
- **Διαλογή/Αναπαραγωγή**
- **Διασταύρωση**
- **Μετάλλαξη**

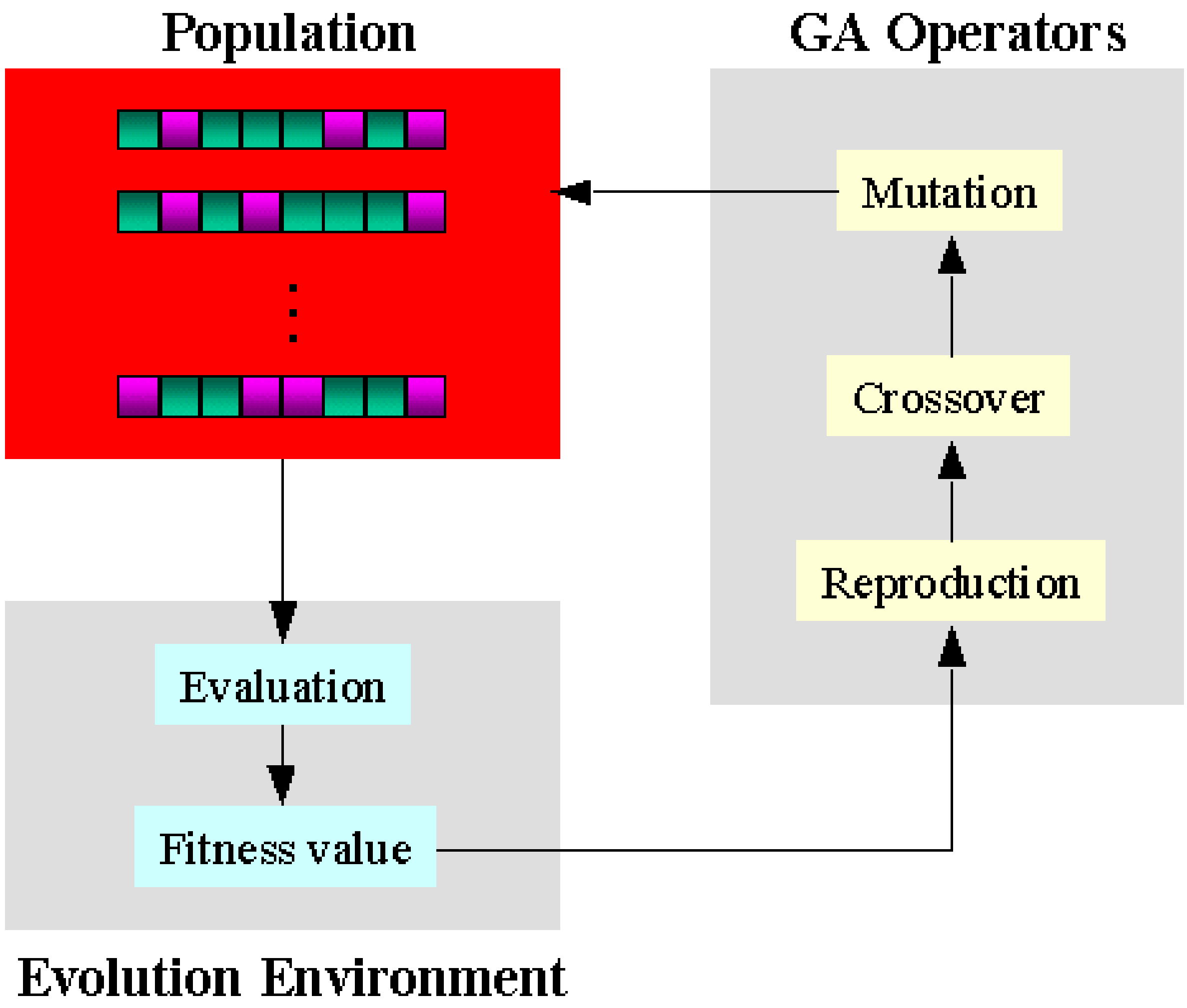
III. Προκύπτει έτσι ένας νέος πληθυσμός **P(t+1)** και επαναλαμβάνεται η εφαρμογή των παραπάνω τελεστών στον νέο πληθυσμό.

Γενικό διάγραμμα ροής για ένα εξελικτικό αλγόριθμο



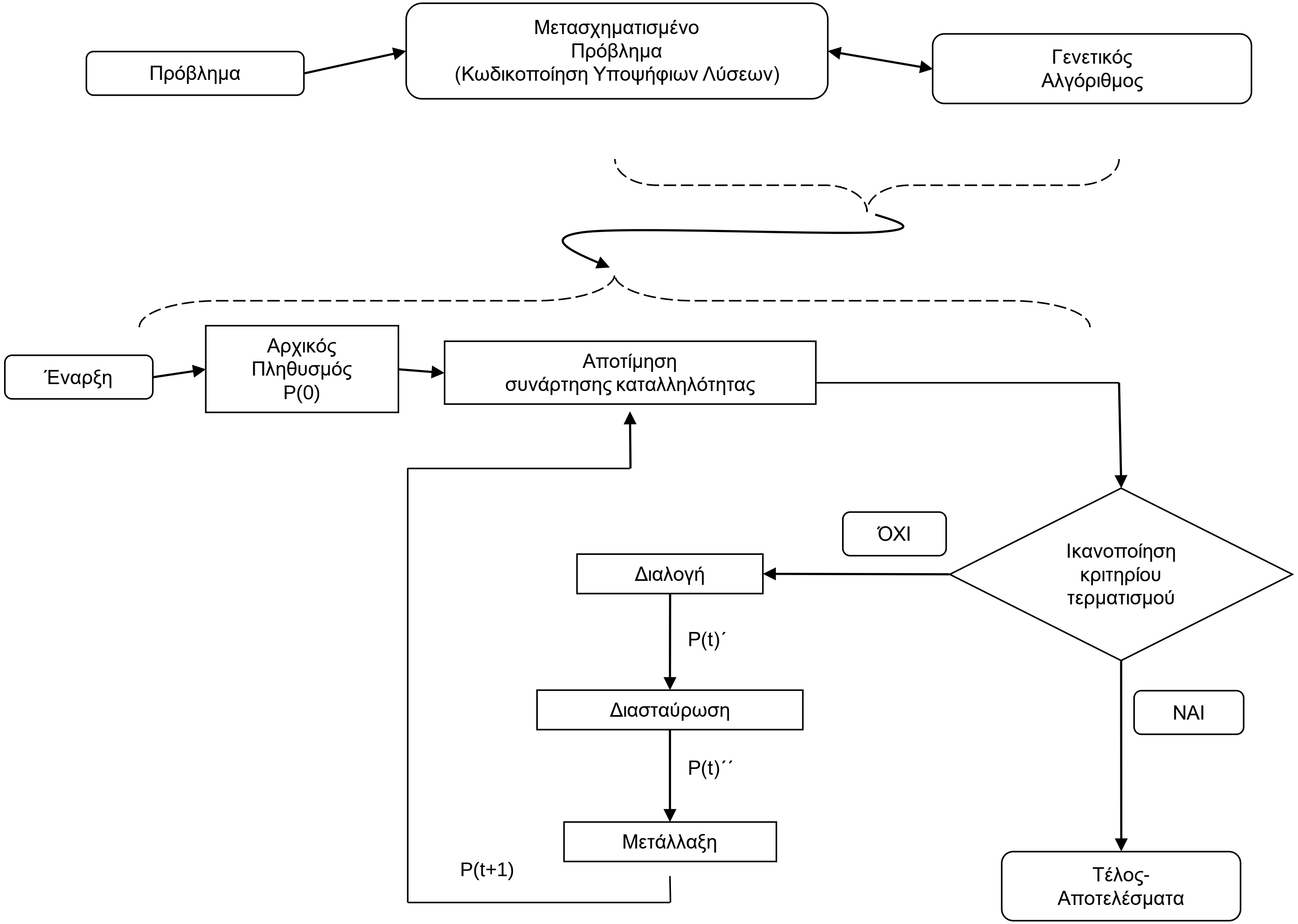

Initialization
Selection
Yes
Stop criteria
No
Crossover
Mutation
Reproduction
Termination


INITIAL GENERATION
DETERMINE POPULATION FITNESS
SELECTION
REPRODUCATION
CROSSOVER
MUTATION
GENETIC ALGORITHM



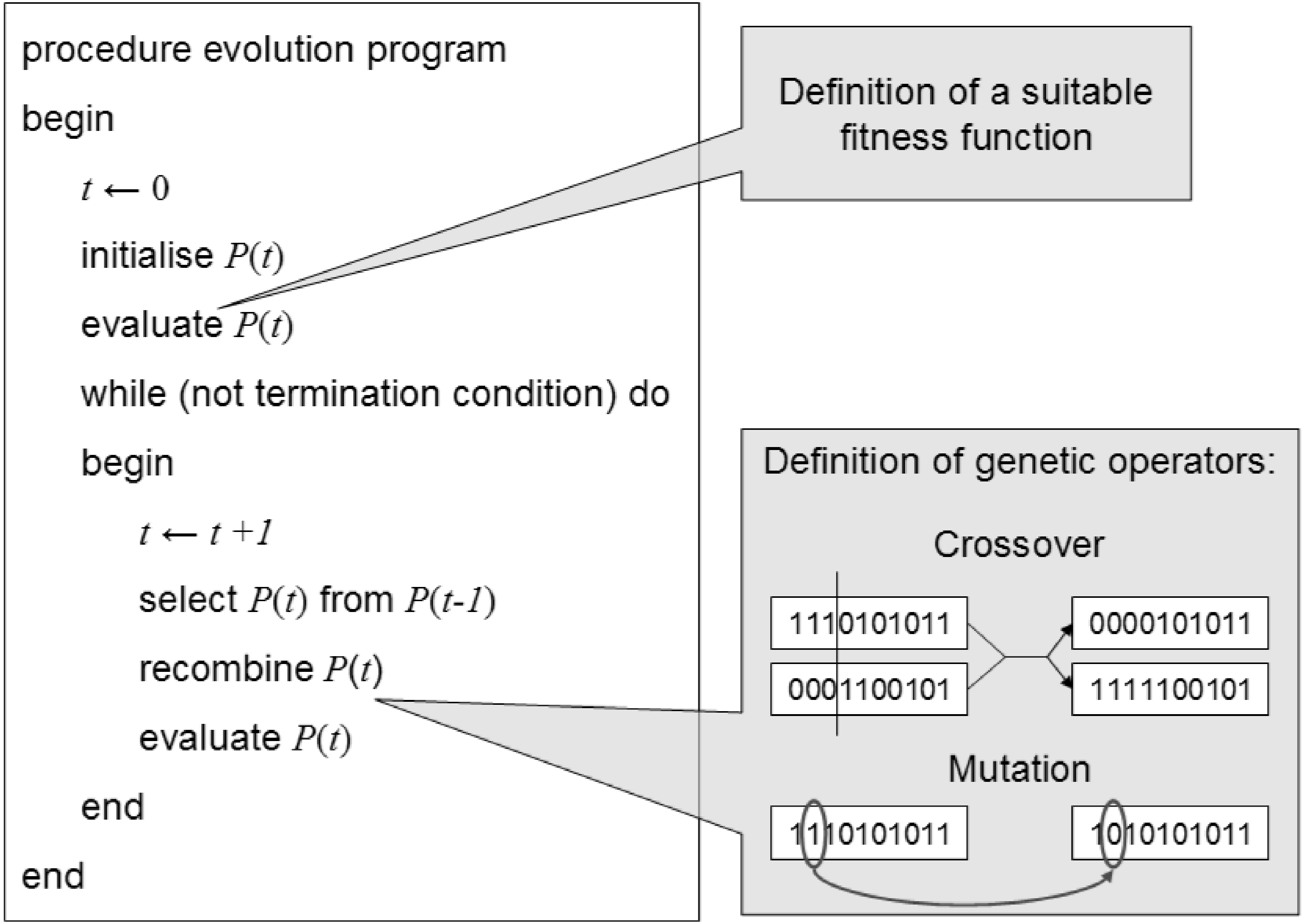
Genetic Algorithm Evolution Flow

Η δομή του βασικού ΓΑ με διάγραμμα ροής



Η δομή του βασικού ΓΑ με ψευδοκώδικα

begin	
t ← 0	Αρχικοποίηση μετρητή (χρόνου ή γενιάς)
initialize P(t)	Αρχικοποίηση τυχαίου πληθυσμού (πιθανές λύσεις)
evaluate P(t)	Αξιολόγηση της καταλληλότητας του πληθυσμού
while (not determination-condition) do	Επανάληψη μέχρι να ικανοποιηθεί το κριτήριο τερματισμού
begin	
t ← t+1	Αύξηση του μετρητή
select P(t) from P(t-1)	Διαλογή γονέων για τη δημιουργία απογόνων
crossover P(t) = P'(t)	Διασταύρωση των επιλεγμένων γονέων
mutation P(t) = P'(t)	Μετάλλαξε τον πληθυσμό στοχαστικά
evaluate P'(t)	Αξιολόγηση της καταλληλότητας του νέου πληθυσμού
end	
Replace	Χρησιμοποίησε το νέο πληθυσμό για περισσότερα τρεξίματα
end	


procedure evolution program
begin
t ← 0
initialise P(t)
evaluate P(t)
while (not termination condition) do
begin
t ← t +1
select P(t) from P(t-1)
recombine P(t)
evaluate P(t)
end
end
Definition of a suitable fitness function
Definition of genetic operators:
Crossover
1110101011
0001100101
0000101011
1111100101
Mutation
1110101011
1010101011

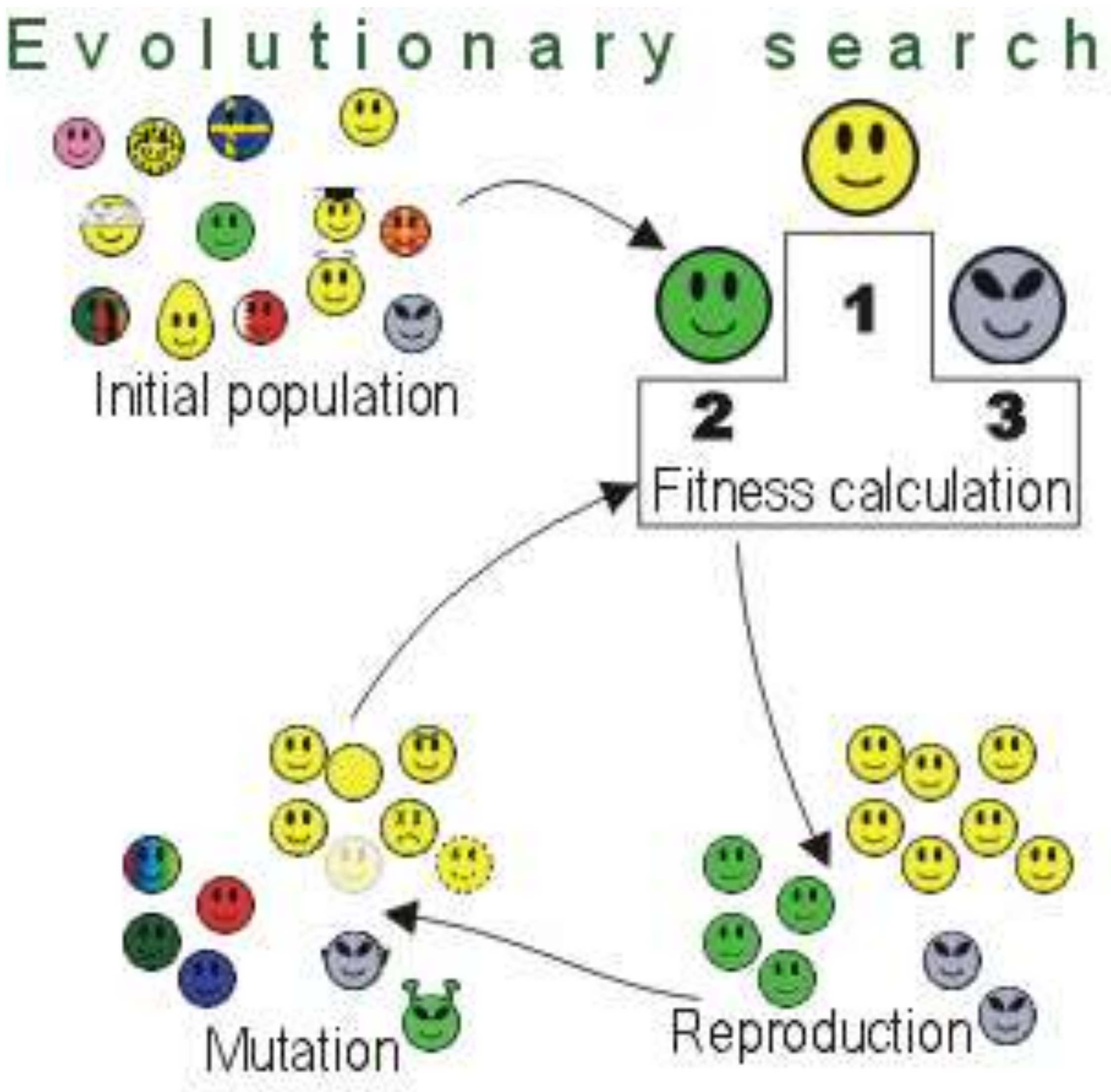
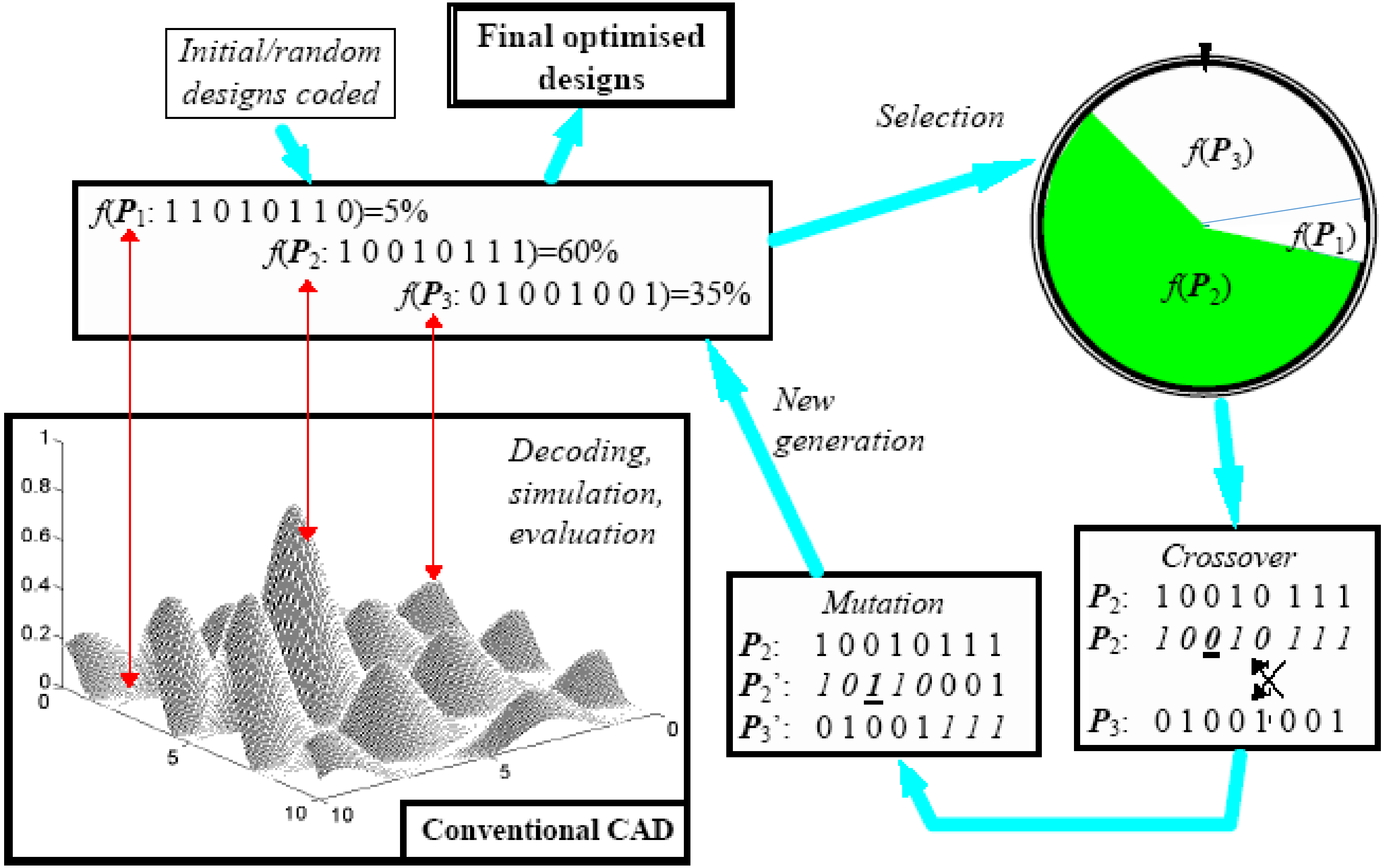


Figure 6. Evolutionary search

Η λειτουργία του ΓΑ



Αντικειμενική συνάρτηση ή συνάρτηση κόστους

Σε ένα πρόβλημα αριστοποίησης μιας αντικειμενικής συνάρτησης, μέσω της καταλληλότητας, απεικονίζεται η ποιοτική διαφοροποίηση των λύσεων, όπως αυτή προκύπτει από την αποτίμηση της συνάρτησης κόστους.

Η απεικόνιση αυτή επιτυγχάνεται με τον μετασχηματισμό της συνάρτησης κόστους y(x) σε μια συνάρτηση καταλληλότητας f(x) η οποία πρέπει να εξασφαλίζει πάντα

→ **θετικές τιμές καταλληλότητας.**

Αυτό είναι απαραίτητο διότι στη διαδικασία της αναπαραγωγής υπολογίζεται η πιθανότητα P επιλογής ενός χρωμοσώματος, η οποία είναι συνάρτηση της f(x), και πρέπει να είναι θετική.

Μετασχηματισμός αντικειμενικής συνάρτησης σε συνάρτηση καταλληλότητας σε πρόβλημα μεγιστοποίησης-1

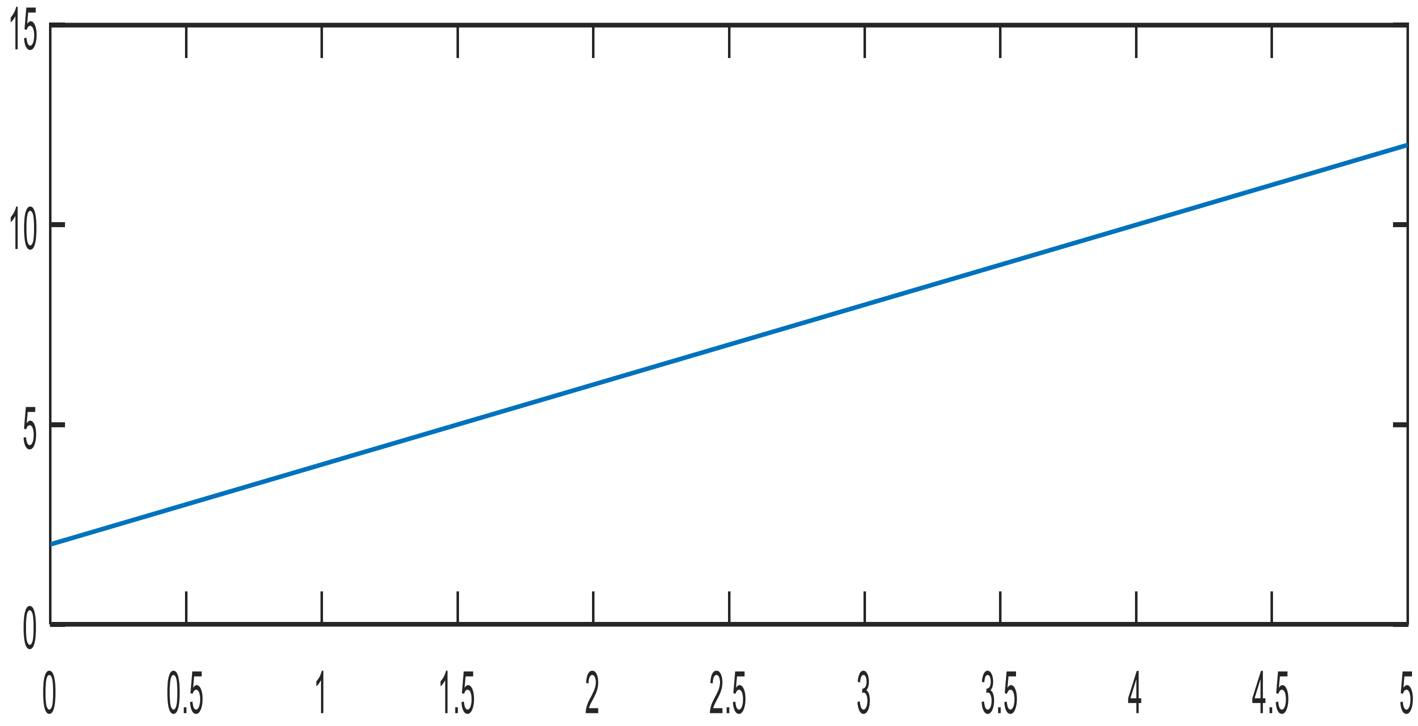
Για να μεγιστοποιηθεί η y(x), η οποία λαμβάνει **μόνο θετικές τιμές,** η συνάρτηση καταλληλότητας ορίζεται ως

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$$

Συνάρτηση καταλληλότητας: f(x)
Συνάρτηση κόστους: y(x)

Παράδειγμα

$$y(x) = 2x + 2 > 0, x \in [0,5] \Rightarrow f(x) = y(x)$$



Μετασχηματισμός αντικειμενικής συνάρτησης σε συνάρτηση καταλληλότητας σε πρόβλημα μεγιστοποίησης-2

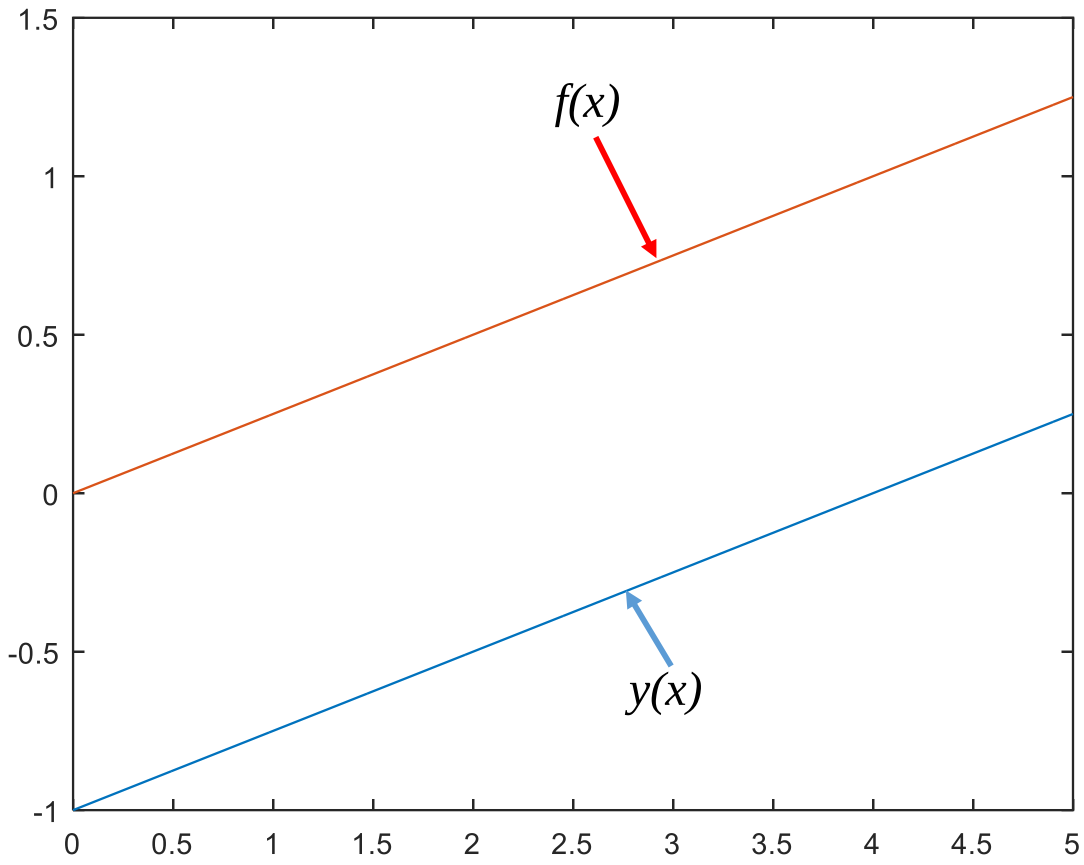
Για να μεγιστοποιηθεί η y(x) η οποία παίρνει και **αρνητικές τιμές** στο πεδίο τιμών της, η συνάρτηση καταλληλότητας ορίζεται ως

$$\boldsymbol{f(x) = y(x) - min\{y(x)\}}$$

όπου $\min\{y(\mathrm{x})\}$ η μικρότερη τιμή της $y(\mathrm{x})$ που παρατηρείται στον τρέχον πληθυσμό ή μέχρι την τρέχουσα γενιά. Ο όρος αυτός μετατοπίζει τη συνάρτηση προς τα επάνω ώστε η f(x) να λαμβάνει πάντα θετικές τιμές.

Παράδειγμα

$$y(x) = \frac{x}{4} - 1$$
$$0 \leq x \leq 5$$
$$f(x) = \frac{x}{4} - 1 - (-1) = \frac{x}{4}$$



Μετασχηματισμός αντικειμενικής συνάρτησης σε συνάρτηση καταλληλότητας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης-3

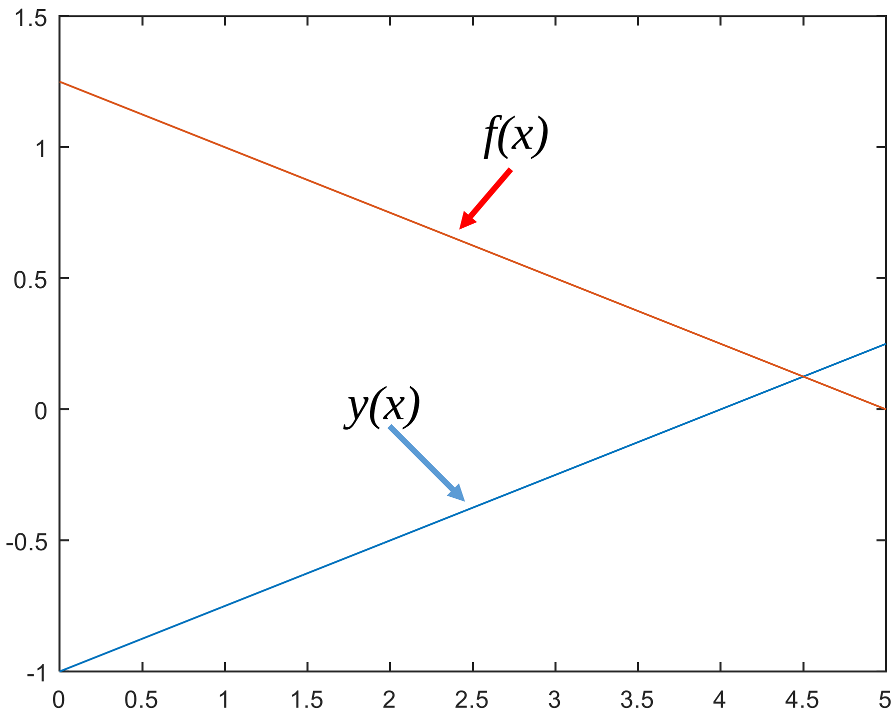
Για να ελαχιστοποιηθεί η y(x), η οποία παίρνει και **αρνητικές τιμές** στο πεδίο τιμών της, η συνάρτηση καταλληλότητας ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{f(x) = -y(x) + max\{y(x)\}}$$

όπου max{y(x)} η μέγιστη τιμή της y(x) που παρατηρείται στον τρέχον πληθυσμό, ή μέχρι την τρέχουσα γενιά. Ο όρος αυτός μετατοπίζει τη συνάρτηση προς τα επάνω ώστε η f(x) να λαμβάνει πάντα θετικές τιμές.

Παράδειγμα

$$y(x) = \frac{x}{4} - 1$$
$$0 \leq x \leq 5$$
$$f(x) = \frac{5}{4} - \frac{x}{4}$$



Μετασχηματισμός αντικειμενικής συνάρτησης σε συνάρτηση καταλληλότητας σε πρόβλημα ελαχιστοποίησης-4

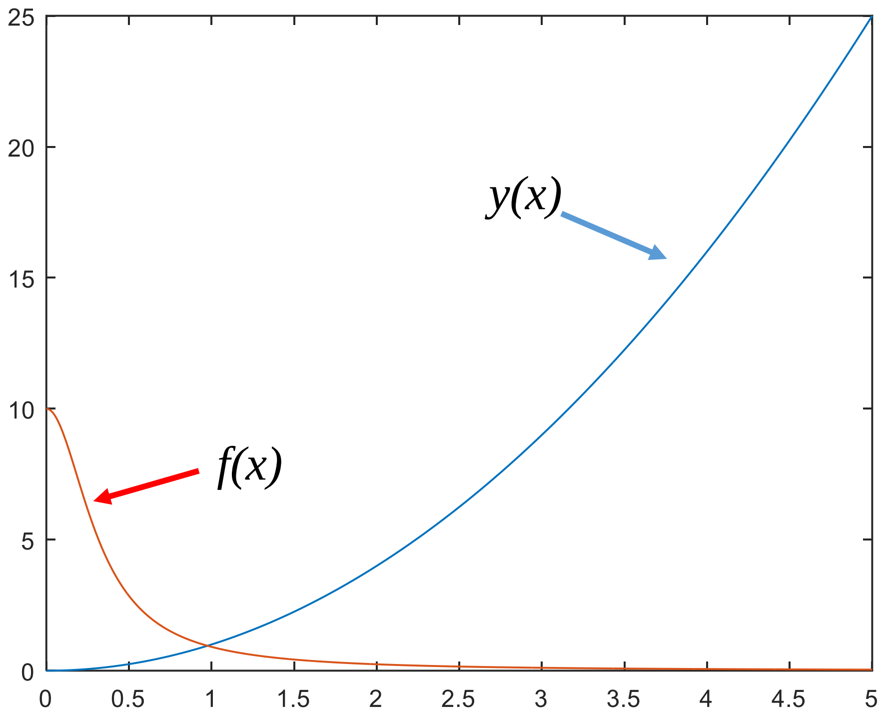
Για να ελαχιστοποιηθεί η y(x), η οποία παίρνει μόνο **θετικές τιμές** στο πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της, η συνάρτηση καταλληλότητας ορίζεται ως:

$$\boldsymbol{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{y(x)} + \boldsymbol{\varepsilon}}$$

όπου ε ένας μικρός αριθμός για να αποφύγουμε την περίπτωση όπου το ελάχιστο της y(x) είναι μηδέν.

Παράδειγμα

$$y(x) = x^2$$
$$0 \leq x \leq 5$$
$$f(x) = \frac{1}{y(x) + \varepsilon} = \frac{1}{x^2 + 0.1}$$



Αναπαράσταση - Κωδικοποίηση

Τρόποι αναπαράστασης χρωμοσώματος:

- Δυαδική αλυσίδα (1101 ... 0110)

  (Binary code, Gray code)
- Πραγματικοί αριθμοί (53.1 -25.2 ... 0.1 9.2)
- Permutations of element (E11 E3 E7 ... E1 E15)
- Λίστα κανόνων (R1 R2 R3 ... R22 R23)
- Ρουτίνες προγράμματος (Γενετικός προγραμματισμός)
- Ασαφής κωδικοποίηση
- Οποιαδήποτε άλλη δομή δεδομένων ...

Μετατροπή ενός αριθμού σε οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα

Μπορούμε να γράψουμε έναν αριθμό από οποιοδήποτε αριθμητικό σύστημα όπως παρακάτω:

$$(d_{n-1}\dots d_1 d_0)_B = d_{n-1}B^{n-1} + \dots + d_2 B^2 + d_1 B^1 + d_0 B^0$$

όπου B είναι η βάση του αριθμητικού συστήματος, d το ψηφίο και n είναι το πλήθος των ψηφίων του αριθμού.

Παράδειγμα ο αριθμός 32510_{10}.

$$32510 = 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^0$$

Παράδειγμα ο αριθμός 111010_2.

$$111010 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0$$
$$= 58$$

Δυαδική αναπαράσταση

Παράδειγμα: Μετατροπή του αριθμού 111_{10} στο δυαδικό σύστημα.

Διαίρεση		Πηλίκο		Υπόλοιπο	
111:2	→	55	&	1	
55:2	→	27	&	1	
27:2	→	13	&	1	
13:2	→	6	&	1	
6:2	→	3	&	0	
3:2	→	1	&	1	
1:2	→	0	&	1	
					1 1 0 1 1 1 1

Παράδειγμα: Μετατροπή του αριθμού 1101111_{2} στο δεκαδικό σύστημα.

Λογικές συναρτήσεις

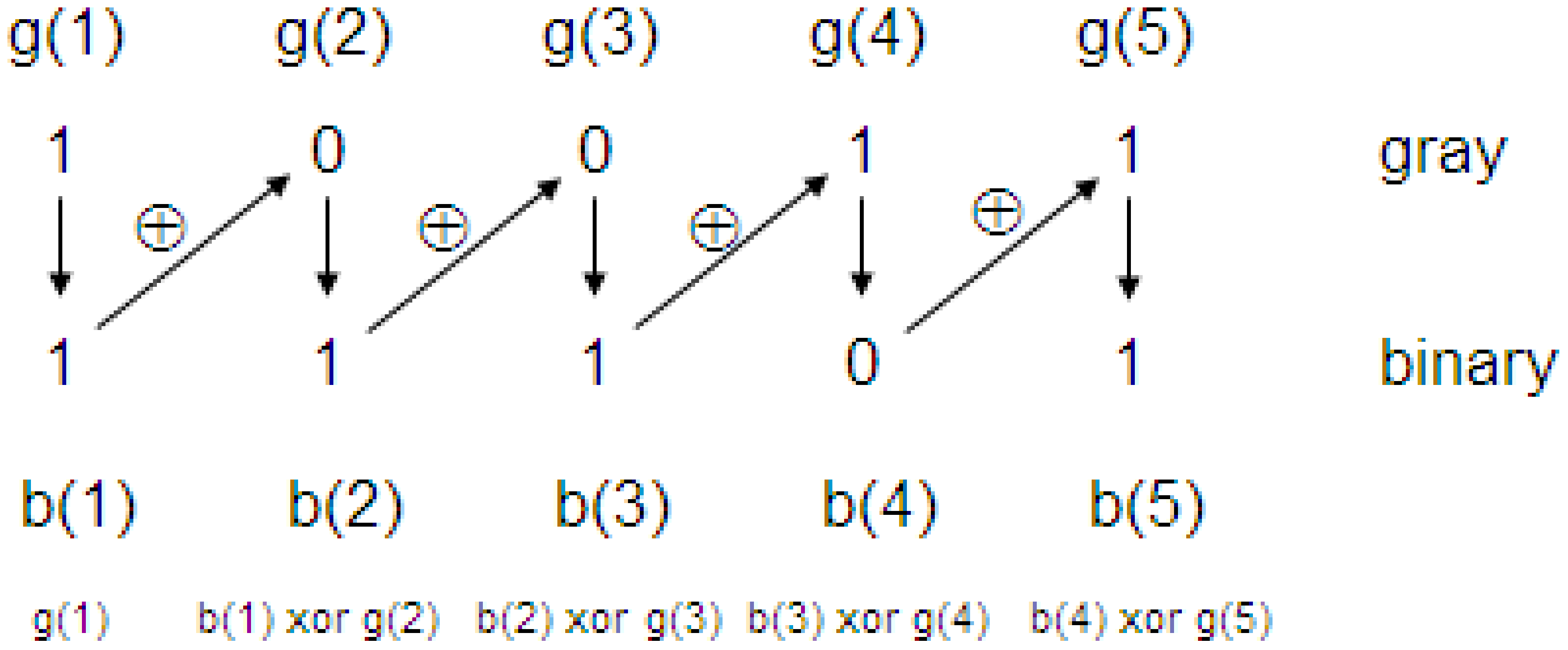
x_1	x_2	$\overline{x_1}$	$\overline{x_2}$	OR	AND	XOR	$\overline{XOR}$
0	0	1	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1

Gray αναπαράσταση

Μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού από δυαδικό κώδικα σε Gray κώδικα

b(1)	b(2)	b(3)	b(4)	b(5)	
1	⊕ 1	⊕ 1	⊕ 0	⊕ 1	binary
1	0	0	1	1	gray
g(1)	g(2)	g(3)	g(4)	g(5)	
b(1)	b(1) xor b(2)	b(2) xor b(3)	b(3) xor (4)	b(4) xor b(5)	

Μετατροπή ενός δυαδικού αριθμού από Gray κώδικα σε δυαδικό κώδικα



Το πρόβλημα της δυαδικής αναπαράστασης και η αντιμετώπισή του

- Μικρές αλλαγές στα ψηφία προκαλούν μεγάλες αλλαγές στην καταλληλότητα.

- Λύση στο πρόβλημα αυτό αποτελεί η Gray αναπαράσταση.

Ένα παράδειγμα: Έστω μια συνάρτηση καταλληλότητας $f(x) = x^2$

Ο αριθμός 15 με δυαδική αναπαράσταση:

$$15_{(10)} = 01111_{(2)} \text{ και } f(15) = 225$$

Αν συμβεί μετάλλαξη στο πρώτο ψηφίο (0) θα έχουμε:

$$(11111)_2 = 31_{(10)} \text{ και } f(31) = 961$$

Με αποτέλεσμα μια μεγάλη αλλαγή (+736) στην καταλληλότητα.

Αν χρησιμοποιήσουμε Gray αναπαράσταση τότε:

$$15_{(10)} = 01000_{(G)} \text{ και } f(15) = 225$$

Αν συμβεί μετάλλαξη στο πρώτο ψηφίο (0) θα έχουμε:

$$(11000)_G = 16_{(10)} \text{ και } f(16) = 256$$

Με αποτέλεσμα μια μικρή αλλαγή (+31) στην καταλληλότητα.

Δυαδική αλυσίδα με δυαδικό κώδικα

Έστω $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, και η κάθε μεταβλητή x_i παίρνει τιμές στο διάστημα $D_i = [r_{min,i}, r_{max,i}]$.

Αν η ακρίβεια της λύσης θέλουμε να είναι με z δεκαδικά ψηφία, τότε το μήκος l_i της ψηφιοσειράς πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$(r_{max,i}-r_{min,i}) \cdot 10^z \leq 2^{l_i} - 1 \qquad (1)$$

Η μετατροπή (απεικόνιση) της δυαδικής ψηφιοσειράς στην πραγματική τιμή της μεταβλητής, γίνεται με τη σχέση:

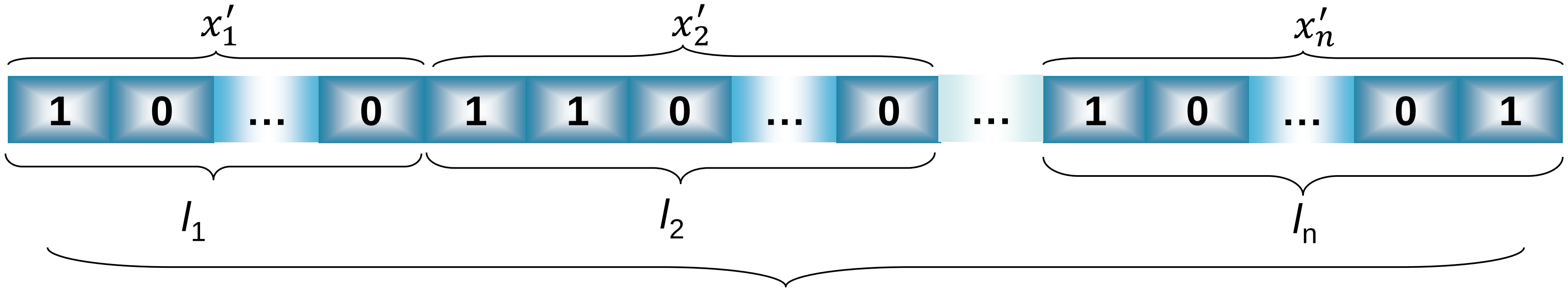
$$x_i = r_{min,i} + x_i' \cdot R_i \qquad (2)$$

όπου x_i' είναι οι δεκαδικοί αριθμοί της ψηφιοσειράς και R το βήμα διακριτικοποίησης.

Το μήκος της ψηφιοσειράς l_i (γονίδια) και το βήμα διακριτοποίησης R_i συνδέονται με τη σχέση:

$$R_i = \frac{r_{max,i} - r_{min,i}}{2^{l_i} - 1} \qquad (3)$$

Όλες οι μεταβλητές ενώνονται σε ένα string, το χρωμόσωμα, συνολικού μήκους: $L = l_1+l_2+\ldots+l_n$



Χρωμόσωμα

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2) και (3) έχουμε την σχέση απεικόνισης των δεκαδικών αριθμών της ψηφιοσειράς στους πραγματικούς αριθμούς της παραμέτρου x.

$$x_i = r_{min,i} + x_i' \cdot \frac{r_{max,i} - r_{min,i}}{2^{l_i} - 1} \tag{4}$$

Παράδειγμα: Μια μεταβλητή x λαμβάνει τιμές στο διάστημα [-2,5] και κωδικοποιείται με 6 bits. Να γίνει η απεικόνιση των δεκαδικών αριθμών 0,7,18, 21, 36,63 της ψηφιοσειράς στο διάστημα [-2,5].

Χρωμόσωμα	Δεκαδικός αριθμός ψηφιοσειράς	Πραγματικός αριθμός στο διάστημα [-2,5]
(000000)	0	-2
(000111)	7	-1.23
010010)	18	0
(010101)	21	0.33
(100100)	36	2
(111111)	63	5

Παραδείγματα κωδικοποίησης δεκαδικού αριθμού

1. Πόσα bits απαιτούνται με ακρίβεια ενός δεκαδικού για την παράσταση ενός πραγματικού αριθμού που ανήκει στο διάστημα [-1,2].

Λύση

Το μήκος του διαστήματος είναι 2-(-1)=3. Για να επιτύχουμε ακρίβεια ενός δεκαδικού το διάστημα διαιρείται σε 3x10=30 ίσου μεγέθους διαστήματα.

Επομένως $2^4 \leq 30 \leq 2^5$

Άρα απαιτούνται 5 bits.

2. Πόσα bits απαιτούνται με ακρίβεια ακέραιου αριθμού για την παράσταση ενός πραγματικού αριθμού που ανήκει στο διάστημα [0,30].

Απάντηση: 5 bits

3. Πόσα bits απαιτούνται με ακρίβεια τριών δεκαδικών αριθμών για την παράσταση ενός πραγματικού αριθμού που ανήκει στο διάστημα [0,30].

Απάντηση: 15 bits

4. Να χρησιμοποιηθούν ΤΝΔ που προσομοιώνουν τη συνάρτηση XOR για να υλοποιηθεί η διαδικασία μετατροπής ενός δυαδικού αριθμού σε Gray αριθμό και το αντίστροφο (χρησιμοποιήστε δυαδικούς αριθμούς με 4 bit).

5. Να γραφούν οι δεκαδικοί αριθμοί από 0-15 σε δυαδικό και Gray κώδικα.

6. Έστω ένα χρωμόσωμα αποτελούμενο από 3 μεταβλητές, κάθε μία από τις οποίες αναπαρίσταται με 4 δυαδικά ψηφία. Θεωρώντας ότι και οι 3 μεταβλητές έχουν το ίδιο πεδίο τιμών [0,10] να βρεθούν οι πραγματικές τιμές των μεταβλητών, όταν το χρωμόσωμα έχει τη μορφή 010100110010.

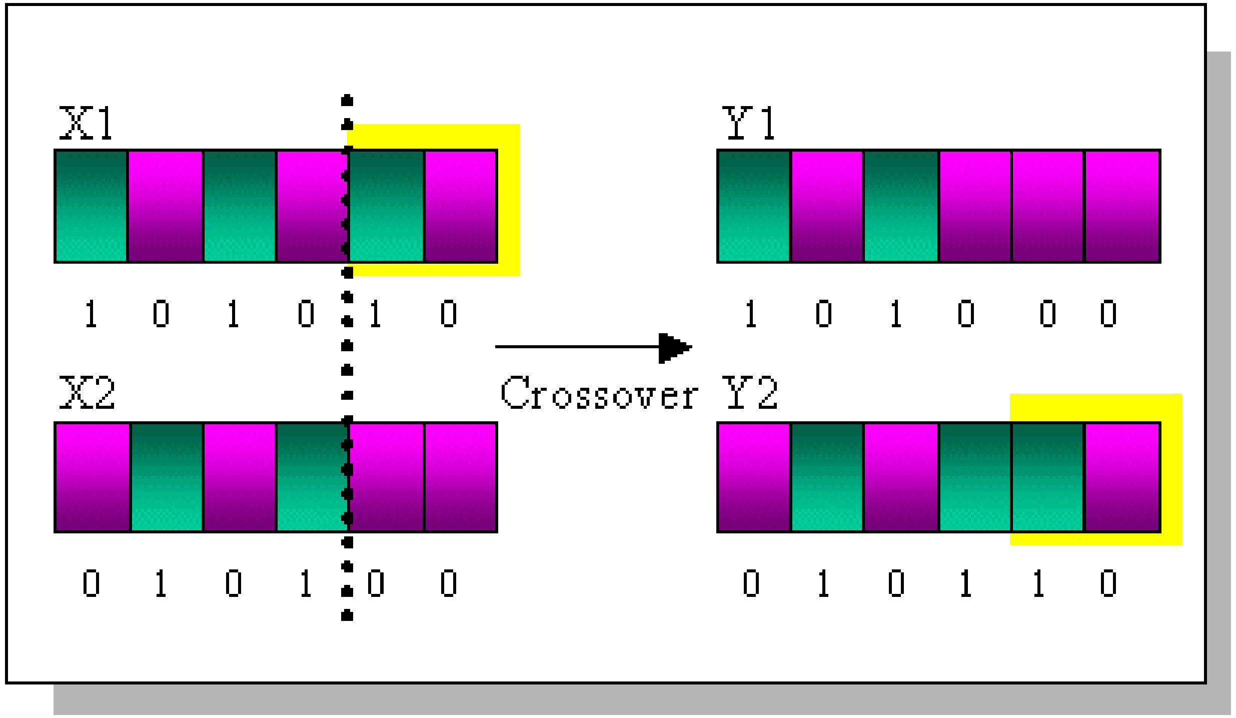
Απάντηση στο 5ο παράδειγμα

Decimal numbers	Binary code	Gray code
0	0000	0000
1	0001	0001
2	0010	0011
3	0011	0010
4	0100	0110
5	0101	0111
6	0110	0101
7	0111	0100
8	1000	1100
9	1001	1101
10	1010	1111
11	1011	1110
12	1100	1010
13	1101	1011
14	1110	1001
15	1111	1000

Διασταύρωση

Διασταύρωση σε ένα σημείο ή σε πολλαπλά σημεία (multi-point crossover). Αρχικά επιλέγεται ένας αριθμός σημείων διασταύρωσης N και στη συνέχεια ο κάθε γονέας τεμαχίζεται σε N σημεία. Ανταλλάσσονται αμοιβαία τμήματα των χρωμοσωμάτων των γονέων, τα οποία προέκυψαν από τη διαίρεση των χρωμοσωμάτων τους στα σημεία διασταύρωσης.

	Διασταύρωση ενός σημείου	**Διασταύρωση δύο σημείων**
Γονέας 1	1 1 0 0 | 1 0 1 0	1 1 0 | 0 1 0 | 1 0
Γονέας 2	0 0 1 0 | 0 1 1 1	0 0 1 | 0 0 1 | 1 1
Απόγονος 1	1 1 0 0 | 0 1 1 1	1 1 0 | 0 0 1 | 1 0
Απόγονος 2	0 0 1 0 | 1 0 1 0	0 0 1 | 0 1 0 | 1 1


X1
1 0 1 0 1 0
X2
0 1 0 1 0 0
Crossover
Y1
1 0 1 0 0 0
Y2
0 1 0 1 1 0

Επιλογή του σημείου διασταύρωσης

Το σημείο διασταύρωσης μιας ψηφιοσειράς ορίζεται ως εξής: Μια ακέραια θέση k επιλέγεται ομοιόμορφα τυχαία μεταξύ του 1 και του μήκους l της ψηφιοσειράς μείον ένα $[1, l–1]$. Οι δύο νέες ψηφιοσειρές δημιουργούνται ανταλλάσσοντας όλους τους χαρακτήρες μεταξύ των θέσεων k+1 και l αντίστοιχα.

Παράδειγμα: Εάν δώσουμε δυο τυχαίους αριθμούς k=3 και k=1, ποια θα είναι τα σημεία διασταύρωσης και ποιο θα είναι το αποτέλεσμα της διασταύρωσης των παρακάτω ψηφιοσειρών;

α) Γονέας 1: 0 1 1 0 1
Γονέας 2: 1 1 0 0 0

β) Γονέας 1: 1 1 0 0 0
Γονέας 2: 1 0 0 1 1

Απάντηση

α) 0 1 1 | 0 1 → 0 1 1 0 0
1 1 0 | 0 0 → 1 1 0 0 1

β) 1 | 1 0 0 0 → 1 0 0 1 1
1 | 0 0 1 1 → 1 1 0 0 0

Τι είναι η πιθανότητα διασταύρωσης Pc;

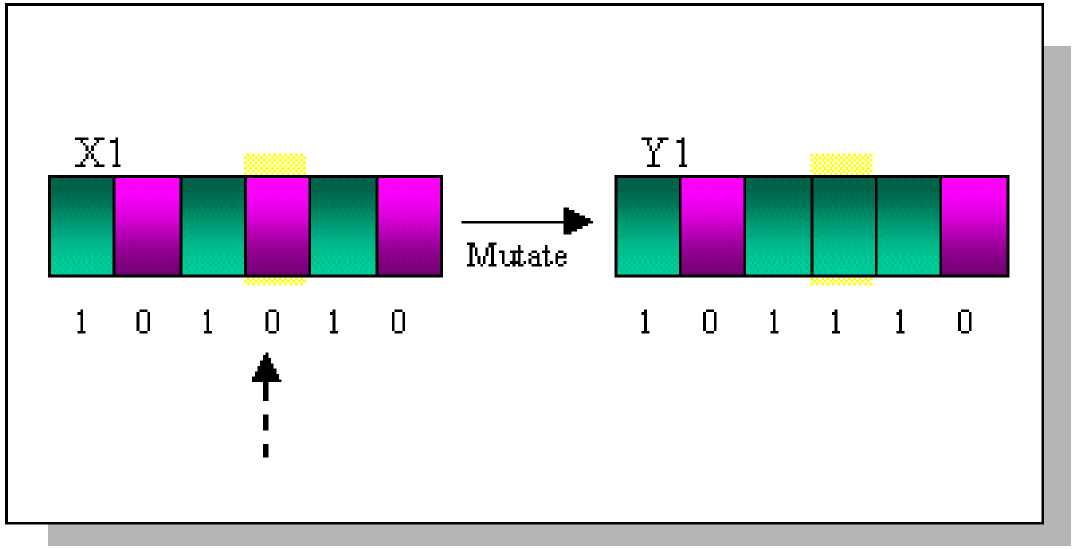
Το πλήθος των χρωμοσωμάτων, που μπορούν να διασταυρωθούν σε κάθε γενιά, είναι ο αριθμός των χρωμοσωμάτων *k* του πληθυσμού επί την πιθανότητα διασταύρωσης Pc.

Παράδειγμα: *k* = 20, Pc = 0.6. Τα χρωμοσώματα που θα επιλεγούν τυχαία για διασταύρωση είναι 12 = 20x0.6

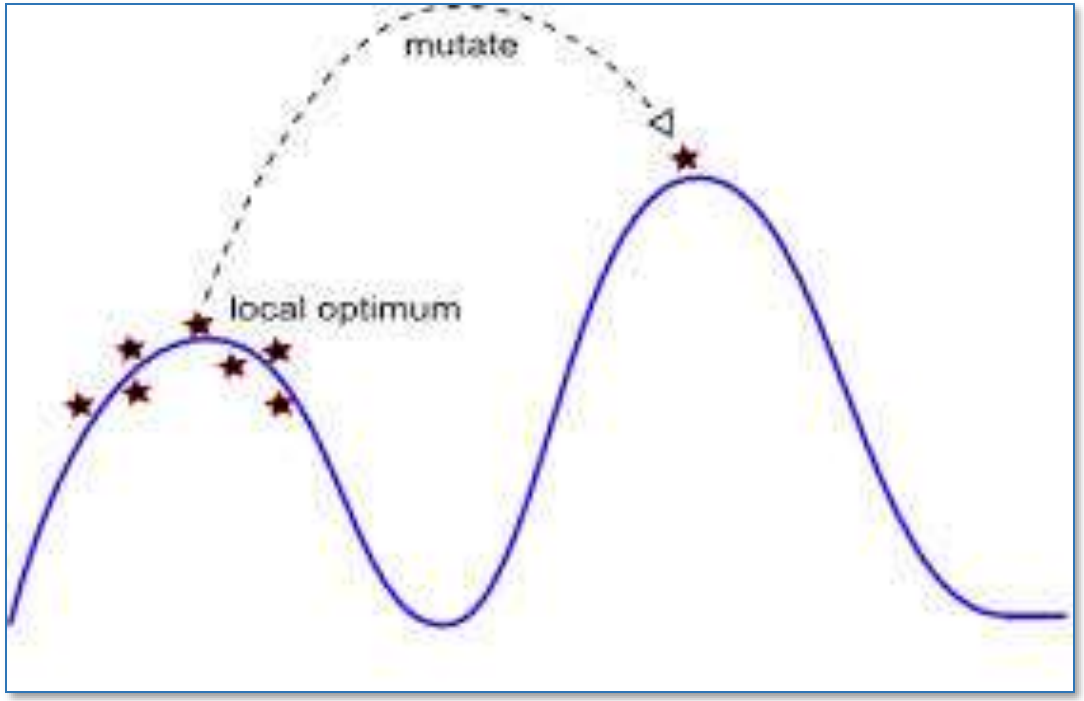
Μετάλλαξη

Ο τελεστής της μετάλλαξης διασφαλίζει την ποικιλομορφία του πληθυσμού, αφού είναι ο μόνος μηχανισμός που επιτρέπει τον τυχαίο σχηματισμό χρωμοσωμάτων και επομένως συμβάλλει στη διεύρυνση του χώρου των λύσεων.

	Δυαδική κωδικοποίηση
Αρχικό χρωμόσωμα	1 1 0 0 1 0 1 0
Μεταλλαγμένο χρωμόσωμα	1 1 **1** 0 1 0 1 0


X1
Mutate
Y1
1 0 1 0 1 0
1 0 1 1 1 0

Τι μπορεί να συμβεί με τη μετάλλαξη;



Όταν η καλύτερη καταλληλότητα είναι εγκλωβισμένη σε μια τιμή για αρκετό χρόνο τότε το σύστημα είναι σε τοπικό βέλτιστο. Για να ξεφύγει πρέπει να γίνει αύξηση του ρυθμού της μετάλλαξης Pm και μείωση του ρυθμού διασταύρωσης Pc

Τι είναι η πιθανότητα μετάλλαξης Pm;

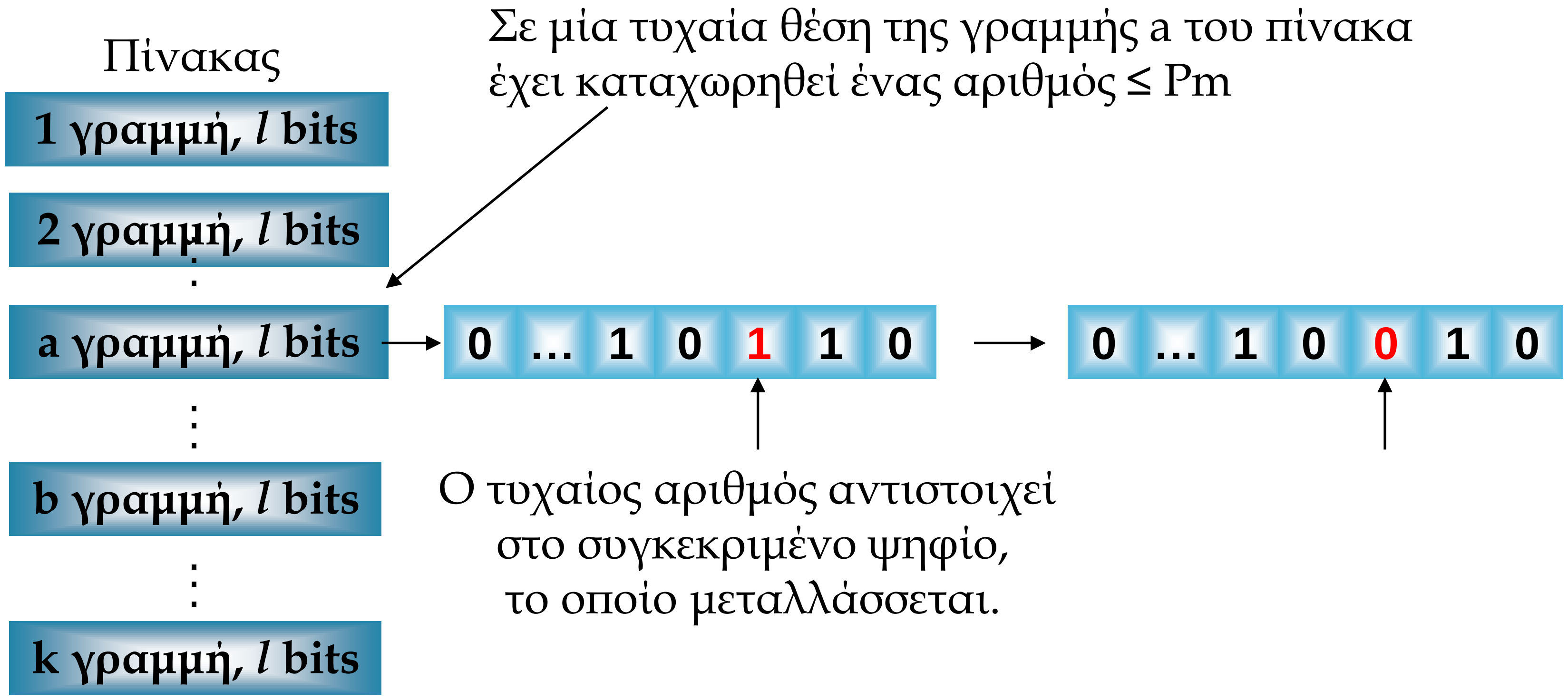
Η εφαρμογή του τελεστή της μετάλλαξης γίνεται με μία τυχαιότητα όσον αφορά τόσο το χρωμόσωμα, όσο και το γονίδιο (bit) στο οποίο θα εφαρμοστεί. Συγκεκριμένα, με βάση την πιθανότητα μετάλλαξης *Pm*, επιλέγεται τυχαία το χρωμόσωμα και το γονίδιο το οποίο θα μεταλλαχτεί.

Έστω ότι έχουμε έναν πληθυσμό k χρωμοσωμάτων με μήκος l το καθένα. Συνολικά διαθέτουμε $\delta = k \cdot l$ bits. Παράγονται δ τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1]. Αν κάποιος από αυτούς είναι μικρότερος από την πιθανότητα μετάλλαξης Pm, τότε και μόνο τότε εφαρμόζεται μετάλλαξη σε αυτό το συγκεκριμένο ψηφίο του συγκεκριμένου χρωμοσώματος.

Οι δυνατές μεταλλάξεις σε κάθε κύκλο είναι: $\delta \cdot \mathrm{P}_m$

Παράδειγμα: δ = 500 bits, Pm = 0.01. Οι δυνατές μεταλλάξεις σε κάθε γενιά είναι 500x0.01 = 5.

P_m η πιθανότητα μετάλλαξης, k χρωμοσώματα, l τα ψηφία του χρωμοσώματος και $\delta = k \cdot l$ τυχαίους αριθμούς.



Εμπειρικός τύπος υπολογισμού της P_m

$$P_m \approx \frac{1.75}{k \cdot \sqrt{l}}$$

Άσκηση 1

Τρείς παράμετροι x, y, z κωδικοποιούνται με δυαδικό κώδικα και ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου. Οι παράμετροι λαμβάνουν τιμές στις περιοχές:

$$x \in [0,3.75], y \in [0.2,0.83], z \in [2.5,8.7]$$

α) Να υπολογιστεί το μήκος l της ψηφιοσειράς της κάθε παραμέτρου και το μήκος L του χρωμοσώματος.

Απ. $l_x = 6, l_y = 3, l_z = 6, L = 15.$

β) Ποιο είναι το βήμα διακριτοποίησης για την κάθε παράμετρο (ακρίβεια δυο δεκαδικών ψηφίων).

Απ.

$R_x = 0.05952381 \approx 0.06, R_y = 0.09, R_z = 0.0984127 \approx 0.1$

γ) Εάν οι τιμές των παραμέτρων είναι $x = 3, y =$ **0.65** και $z = 5$ ποιοι είναι οι αντίστοιχοι δεκαδικοί x', y', z';

Απ. $x' = 50, y' = 5, z' = 50$

δ) Ποιο είναι το αντίστοιχο χρωμόσωμα για την γ) ερώτηση;

Απ. (110010101110010)

ε. Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές (με τη σχέση 2) του χρωμοσώματος (010100100011011). Οι δεκαδικοί αριθμοί της ψηφιοσειράς:

x΄= (010100) = 20, y΄= (100) = 4, z΄= (011011) = 27

οι αντίστοιχοι πραγματικοί αριθμοί είναι:

$$x = 20 \cdot 0.06 = 1.2$$
$$y = 0.2 + 4 \cdot 0.09 = 0.56$$
$$z = 2.5 + 27 \cdot 0.1 = 5.2$$

στ. Δίνονται δύο χρωμοσώματα Α και Β:

$(x, y, z)_A = (100110010011)$

$(x, y, z)_B = (011011111001)$

Να γίνει διασταύρωση των δύο χρωμοσωμάτων στην τέταρτη θέση και να γράψετε τα νέα χρωμοσώματα Α΄ και Β΄.

ζ. Να γίνει μετάλλαξη στο 9^{ο} δυαδικό ψηφίο στο χρωμόσωμα Α του στ) ερωτήματος.

Άσκηση 2

Τρείς παράμετροι x, y, z κωδικοποιούνται με δυαδικά ψηφία 0 και 1 με μήκος ψηφιοσειράς l_1, l_2 και l_3 αντίστοιχα. Το βήμα διακριτοποίησης R_i για τις τρείς μεταβλητές είναι

$$(R_1, R_2, R_3) = (0.25, 0.01, 0.2)$$

Το πεδίο τιμών των μεταβλητών είναι

$$0 \leq x \leq 3.75$$
$$0.2 \leq y \leq 0.83$$
$$2.5 \leq z \leq 8.7$$

α. Να υπολογιστεί το μήκος της ψηφιοσειράς για την κάθε παράμετρο (σχέση 3);

β. Ποιο είναι το μήκος του χρωμοσώματος που κωδικοποιεί τις τρείς παραμέτρους;

γ. Πόσα γονίδια περιέχονται στο χρωμόσωμα;

δ. Να γράψετε τις τρείς πρώτες τιμές των παραμέτρων με τις αντίστοιχες κωδικοποιήσεις. Πώς ονομάζονται οι τιμές των παραμέτρων και πώς οι κωδικοποιήσεις τους;

ε. Να γίνει η αποκωδικοποίηση (σχέση 2) του χρωμοσώματος (00010000011111).

στ. Δίνονται δύο χρωμοσώματα Α και Β:

$(x, y, z)_A$ = (1100 | 01001111100)

$(x, y, z)_B$ = (0010 | 11000101100)

1. Ποιες είναι οι τιμές των παραμέτρων;

2. Να γίνει διασταύρωση των δύο χρωμοσωμάτων στην τέταρτη θέση και να γράψετε τα νέα χρωμοσώματα Α΄ και Β΄.

3. Ποιες είναι οι νέες τιμές των παραμέτρων;

ζ. Να γίνει μετάλλαξη στο $2^{ο}$ δυαδικό ψηφίο στο χρωμόσωμα Β του στ) ερωτήματος.

Μηχανισμοί διαλογής γονέων

- **Επιλογή με τον περιστρεφόμενο δίσκο ή ρουλέτα ή τροχός της τύχης (roulette-wheel selection)**

Μια απλή περιστροφή της ρουλέτας παράγει την υποψήφια λύση για αναπαραγωγή (Δυναμική διαδικασία επειδή οι πιθανότητες επιλογής δεν παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της εξέλιξης).

- **Μέθοδος διαλογής με βαθμολογία (ranking method)**

Η μέθοδος ταξινομεί τον πληθυσμό σύμφωνα με την τιμή καταλληλότητας και τα βαθμολογεί. Σε κάθε χρωμόσωμα εκχωρείται μια πιθανότητα επιλογής ανάλογα με την βαθμολογία του. Το χρωμόσωμα αναπαράγεται σύμφωνα με την πιθανότητα επιλογής του.

- **Tournament selection (επιλογή με διαγωνισμό ή ανταγωνιστική επιλογή)**

Η μέθοδος αυτή επιλέγει n άτομα και από αυτά το καλύτερο το προωθεί στο νέο πληθυσμό. Αυτό επαναλαμβάνεται τόσες φορές όσες είναι το μέγεθος του πληθυσμού (Στατική διαδικασία επειδή οι πιθανότητες επιλογής παραμένουν σταθερές κατά τη διάρκεια της εξέλιξης).

- …

Αναλογική διαλογή με περιστρεφόμενο δίσκο (ρουλέτα)

- Τα άτομα που έχουν μεγαλύτερη καταλληλότητα, έχουν μεγαλύτερη πιθανότητα να επιλεγούν για τον επόμενο πληθυσμό
- Ένα άτομο μπορεί να επιλεγεί περισσότερες από μία φορές
- Η πιθανότητα *p* να επιλεγεί ένα χρωμόσωμα *i* είναι

$$p_i = \frac{f_i(x)}{\sum_{i=1}^{k} f_i(x)}$$

όπου $f_i(x)$ η καταλληλότητα του *i* ατόμου και *k* το πλήθος των ατόμων.

Υπολογισμός της αθροιστικής πιθανότητας q:

$$q_i = \sum_{j=1}^{k} p_j$$

Πως επιλέγουμε ένα χρωμόσωμα για το νέο πληθυσμό:

•Δημιουργούμε έναν τυχαίο αριθμό r στο διάστημα [0,1].

•Εάν $r < q_1$ τότε επιλέγεις το πρώτο χρωμόσωμα διαφορετικά επιλέγεις το i χρωμόσωμα $(2 \le i \le k)$ τέτοιο ώστε

$$q_{i-1} < r \le q_i$$

Σημαντικές επιλογές για την υλοποίηση ενός ΓΑ

1. **Το μέγεθος του πληθυσμού** των υποψήφιων λύσεων-ατόμων είναι στο διάστημα [60, 100].

- **Για μεγάλους πληθυσμούς**:
  Ρυθμός ή πιθανότητα διασταύρωσης: $P_c = 0.6$
  Πιθανότητα μετάλλαξης: $P_m = 0.001$
- **Για μικρούς πληθυσμούς**:
  Ρυθμός ή πιθανότητα διασταύρωσης: $P_c = 0.9$
  Πιθανότητα μετάλλαξης: $P_m = 0.01$

Η πιθανότητα διασταύρωσης αναφέρεται στον πληθυσμό ενώ η πιθανότητα μετάλλαξης σε όλα τα ψηφία του πληθυσμού.

- **Το μέγεθος του πληθυσμού είναι μια πολύ σημαντική επιλογή για την σύγκλιση του ΓΑ.**
    - ➢ Μικρό μέγεθος πληθυσμού σημαίνει γρήγορη σύγκλιση συνήθως σε τοπικό ακρότατο.
    - ➢ Μεγάλο μέγεθος πληθυσμού σημαίνει αργή σύγκλιση.
- **Το μέγεθος του πληθυσμού επηρεάζει την ποικιλομορφία του πληθυσμού (population diversity) (PD) και την selective pressure (SP).**

❖ SP $\uparrow \Longrightarrow$ $\downarrow$ PD <u>Exploitation</u>: Αξιοποίηση στη γειτονιά της λύσης
❖ SP $\downarrow \Longrightarrow$ $\uparrow$ PD <u>Exploration</u>: Εξερεύνηση στο χώρο των λύσεων

Exploitation: Αξιοποίηση των υποψήφιων λύσεων στη γειτονιά της λύσης. Οι καλές λύσεις εμφανίζονται περισσότερο συχνά στην επόμενη γενιά παρά οι φτωχές λύσεις.

Exploration: Εξερεύνηση στο χώρο των λύσεων. Οι φτωχές λύσεις πρέπει να αλλάξουν για να εμφανιστούν στην επόμενη γενιά.

Διασταύρωση και Μετάλλαξη: Εξερευνούν το χώρο των πιθανών λύσεων.

Μηχανισμός διαλογής: Εξερευνά το χώρο των πιθανών λύσεων. Καθορίζει ποιες υποψήφιες λύσεις θα επιλεγούν για αναπαραγωγή και πόσους απογόνους θα δημιουργεί κάθε επιλεγόμενη λύση.

Selection Pressure είναι ένας μη τυπικός όρος που δεικνύει την ισχύ του μηχανισμού διαλογής. Το SP μετρά το πηλίκο της μέγιστης καταλληλότητας προς το μέσο όρο της καταλληλότητας του πληθυσμού.

- **Δυνατή SP** υποστηρίζει **πρόωρη σύγκλιση** του ΓΑ.
- **Αδύνατη SP** κάνει την αναζήτηση του ΓΑ **μη αποτελεσματική.**
- **Ο μηχανισμός επιλογής** προσπαθεί να ισορροπήσει το **exploitation και το exploration.**

2. **Αριθμός γεννήσεων (ανακυκλώσεων):** Εξαρτάται από το πρόβλημα συνήθως από 20 και πάνω.
3. **Μήκος χρωμοσώματος:** Εξαρτάται από το πρόβλημα.

   Αύξηση του μήκους του χρωμοσώματος αυξάνει και η διάσταση του χώρου αναζήτησης.
4. **Τελεστής αναπαραγωγής / επιλογής γονέων:** Περιστρεφόμενος δίσκος.

Ασκήσεις Αυτοαξιολόγησης

1. Ποιο στοιχείο είναι εκείνο που επιτρέπει στους ΓΑ να κάνουν παράλληλη επεξεργασία δεδομένων; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Απάντηση: Το στοιχείο της κωδικοποίησης των μεταβλητών με δυαδικές συμβολοσειρές. Κωδικοποιώντας τις τιμές ενός συνόλου μεταβλητών, δημιουργείται ένας αρχικός πληθυσμός, ο οποίος πρέπει να αξιολογηθεί. Η αξιολόγηση κάθε συμβολοσειράς, μπορεί να γίνει ανεξάρτητα, άρα παράλληλα με τις άλλες. Μετά την αξιολόγηση εφαρμόζοντας τους γενετικούς τελεστές προκύπτει ο νέος πληθυσμός, ο οποίος αξιολογείται με παράλληλη επεξεργασία.

2. Έστω ότι θέλουμε να υλοποιήσουμε ένα ΓΑ, ο οποίος θα υπολογίζει από ένα πληθυσμό k χρωμοσώματα εκείνο το χρωμόσωμα, το οποίο έχει τους περισσότερους άσσους ‘1’. Ποια αντικειμενική συνάρτηση θα χρησιμοποιήσουμε;

Απάντηση: Αν x είναι το κωδικοποιημένο χρωμόσωμα, τότε η συνάρτηση

$f(x)$ = “ο αριθμός των άσσων στο x”,

είναι μια κατάλληλη αντικειμενική συνάρτηση για το πρόβλημα αυτό.

3. Να αναφέρετε τις τέσσερις βασικές διαφορές που ξεχωρίζουν τους ΓΑ από άλλες (κλασικές) μεθόδους αναζήτησης και βελτιστοποίησης.

Απάντηση: Οι τέσσερις διαφορές που διαχωρίζουν τους Γενετικούς Αλγορίθμους από τις περισσότερο συμβατικές τεχνικές βελτιστοποίησης είναι οι εξής:

1. Απευθείας χειρισμός μιας κωδικοποίησης.
2. Αναζήτηση από έναν πληθυσμό και όχι ένα απλό σημείο.
3. Αναζήτηση μέσω δειγματοληψίας (τυφλή αναζήτηση).
4. Αναζήτηση χρησιμοποιώντας στοχαστικούς τελεστές και όχι ντετερμινιστικούς κανόνες.

4. Για έναν πληθυσμό με μέγεθος *k*=50 και μήκος χρωμοσώματος *l*=33, ποιος είναι ο αναμενόμενος αριθμός των ψηφίων που θα μεταλλαγούν, αν η πιθανότητα μετάλλαξης παίρνει τις τιμές 0.001, 0.01 και 0.1;

Απάντηση: Ο αναμενόμενος αριθμός ψηφίων που θα υποστούν μετάλλαξη υπολογίζεται από τη σχέση *k x l x pm*. Άρα ο αναμενόμενος αριθμός μεταλλάξεων θα είναι αντίστοιχα:

1. 50 x 33 x 0.001 = 1.65
2. 50 x 33 x 0.01 = 16.5
3. 50 x 33 x 0.1 = 165

5. **Το πρόβλημα της οικονομικής κατανομής φορτίου.**

Οικονομική κατανομή φορτίου σημαίνει ελαχιστοποίηση του κόστους λειτουργίας των μονάδων παραγωγής, με τον περιορισμό των τεχνικών ορίων των γεννητριών. Οι ΓΑ δεν επιδρούν πάνω στις τιμές των εξόδων των γεννητριών, αλλά στην κωδικοποιημένη συμβολοσειρά των εξόδων των μονάδων παραγωγής. Τα χαρακτηριστικά των γεννητριών φαίνονται στον επόμενο πίνακα.

Δεδομένα των γεννητριών

	Μέγιστη και ελάχιστη παραγωγή ισχύος		a, b, c: συντελεστές κατανάλωσης καυσίμου			Κόστος καυσίμου
Τύπος σταθμού	**$P_{i,max}$ [MW]**	**$P_{i,min}$ [MW]**	**α_i [m³/h]**	**b_i [m³/MW·h]**	**c_i [m³/MW²·h]**	**$Cost_i$ [€/m³]**
Ατμοηλεκτρικός	6.25	4.0	0	0.368	0	134.9963
Φυσικό αέριο	14.75 (max)	3.0 (min)	2.0938	0.24837	0.002270	360.9685
Ντιζεληλεκτρικός	12.28	3.0	0.3667	0.109	0.00425	134.9963

Έστω ότι εφαρμόζουμε ΓΑ στην παραγωγή ηλεκτρικής ενέργειας. Η έξοδος κάθε γεννήτριας αποτελεί μια μεταβλητή, δηλαδή ένα γονίδιο.

α. Πόσα δυαδικά ψηφία χρειάζονται για να περιγραφεί η έξοδος της κάθε γεννήτριας με ακέραια ακρίβεια; Να γίνει η αντιστοίχιση δεκαδικών και πραγματικών αριθμών για κάθε γεννήτρια.

β. Πόσα δυαδικά ψηφία και πόσα γονίδια θα περιέχει ένα χρωμόσωμα το οποίο θα περιγράφει τις εξόδους των γεννητριών;

γ. Έστω το χρωμόσωμα (101000010101). Υπολογίστε τις εξόδους Pi (i=1,2,3) των γεννητριών.

$$P_{i,\min} \leq P_i \leq P_{i,\max}$$

δ. Να γίνει ο υπολογισμός του κόστους $F_i(P_i)$ (€/h) του χρωμοσώματος.

$$F_i(P_i) = \left(c_i \cdot P_i^2 + b_i \cdot P_i + a_i\right) \cdot Cost_i$$

ε. Να υπολογιστεί το συνολικό κόστος παραγωγής. $F_{\text{total}} = \sum_{i=1}^{3} F_i(P_i)$

στ. Ποια είναι η τιμή της συνάρτησης καταλληλότητας; $\text{fitness} = 1/F_{\text{total}}$

Οι τρείς γεννήτριες έχουν μέγιστη έξοδο 14.75 MW και ελάχιστη 3 MW.
Συμβολοσειρά 4 δυαδικών ψηφίων για κάθε έξοδο γεννήτριας.
Το χρωμόσωμα αποτελείται από 12 δυαδικά ψηφία (3 γεννήτριες επί 4 δυαδικά ψηφία ανά γεννήτρια).
Βήματα διακριτικοποίησης: R1 = 0.15, R2 = 0.783, R3 = 0.6187.
$P_i = r_{min} + P_i' \cdot R_i$.

i	Γονίδιο	Δεκαδικός αριθμός P_i'	P_i (MW)	$F_i(P_i)$ (€/h)
1	(1010)	10	5.5	273.2305
2	(0001)	1	3.783	1106.7
3	(0101)	5	6.0935	160.4697
Άθροισμα F_{total}				1540.4002

Fitness = $1/F_{total}$ = 0.00064918 h/€

Δυαδική αναπαράστασης για την $1^η$ γεννήτρια	Δεκαδικός αριθμός	Πραγματικός αριθμός
(0000)	0	4
(0001)	1	4.15
(0010)	2	4.3
(0011)	3	4.45
. . .		
(1111)	15	6.25

Παραδείγματα εφαρμογής ΓΑ

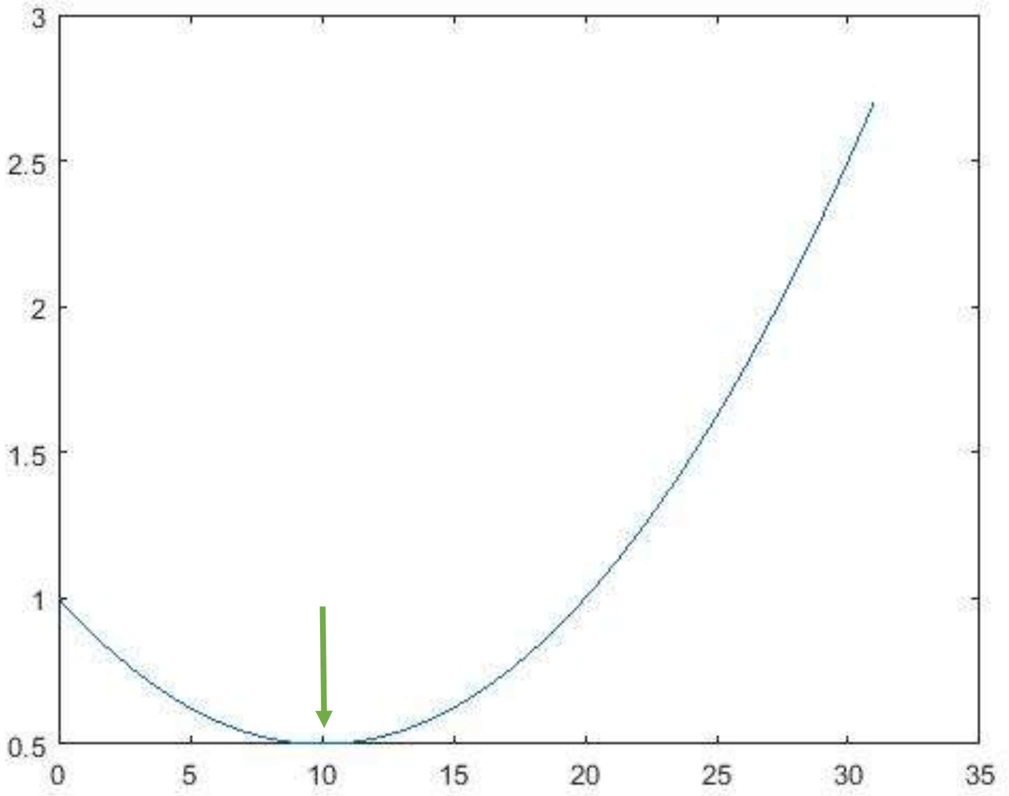
1ο Παράδειγμα
Βελτιστοποίηση απλής συνάρτησης

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα της βελτιστοποίησης συνάρτησης μιας μεταβλητής. Να εντοπίσουμε δηλαδή την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης

$$y(x) = 1 - \frac{1}{10}x + \frac{1}{200}x^2$$

χρησιμοποιώντας τη διαδικασία του ΓΑ. Η μεταβλητή x παίρνει τιμές από 0 έως 31.

Γραφική παράσταση της συνάρτησης



Παράσταση των υποψήφιων λύσεων με δυαδικό κώδικα

Η μεταβλητή x λαμβάνει τιμές στο διάστημα [0,31] με μήκος 31. Αν η ακρίβεια της παράστασης είναι ακέραιου αριθμού τότε διαιρούμε την περιοχή αυτή σε 31 ίσα διαστήματα.

Επομένως ισχύει $2^4 < 31 \leq 2^5 - 1$

άρα επιλέγουμε ένα διάνυσμα 5 bits για την παράσταση του χρωμοσώματος.

Βήμα διακριτικοποίησης R = 1.

Ο δεκαδικός αριθμός της ψηφιοσειράς x_i' ταυτίζεται με τον πραγματικό αριθμό x_i.

Αντικειμενική συνάρτηση και συνάρτηση καταλληλότητας

Στο παράδειγμα αυτό θέλουμε να υπολογίσουμε το ελάχιστο της αντικειμενικής συνάρτησης $y(x)$. Στην περίπτωση αυτή η βέλτιστη τιμή είναι η ελάχιστη και η διαδικασία του ΓΑ δίνει τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης καταλληλότητας.

Επομένως φαίνεται λογικό να θεωρήσουμε ως συνάρτηση καταλληλότητας την αντίστροφη της $y(\mathrm{x})$:

$$f(\mathrm{x}) = 1/y(\mathrm{x})$$

Πως καθορίζεται ο αρχικός πληθυσμός;

- Υποθέτουμε ο αρχικός πληθυσμός να αποτελείται από 5 υποψήφιες λύσεις – χρωμοσώματα.
- Για τη δημιουργία του πληθυσμού δίνεται ένα πίνακας (5x5) τυχαίων αριθμών.
- Όποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος του 0.5 αντιστοιχεί στο «1» και οι μικρότεροι του 0.5 στο «0». Επομένως η κάθε σειρά του πίνακα δημιουργεί και μια ψηφιοσειρά, ένα χρωμόσωμα.

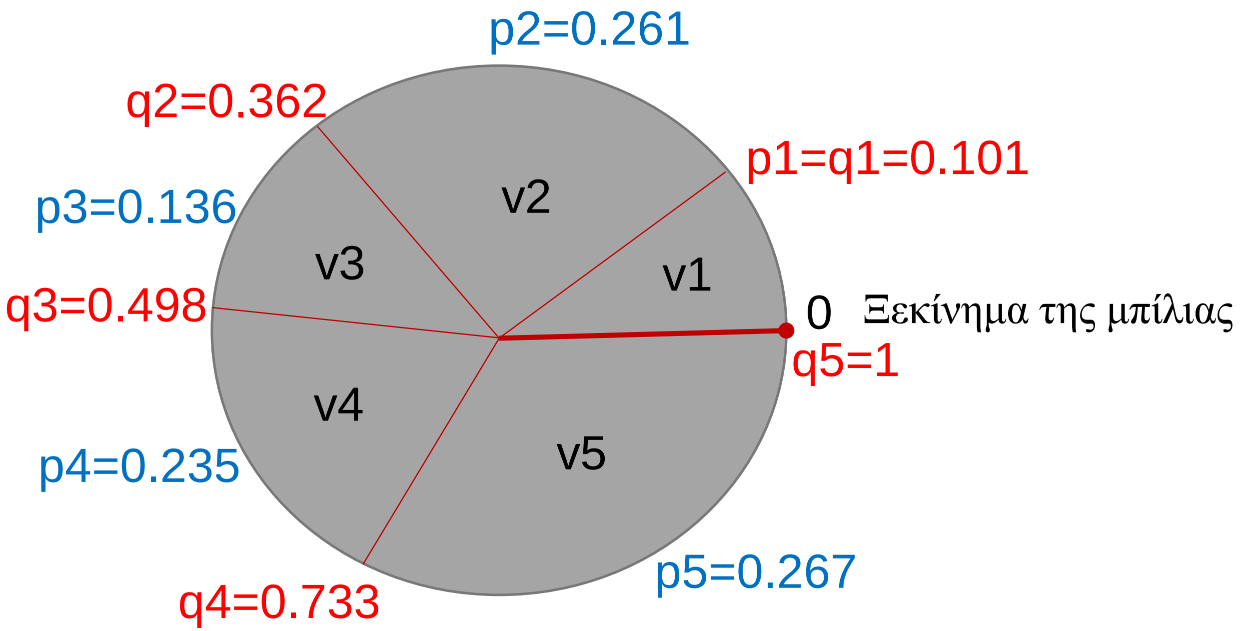
0.8147	0.0975	0.5576	0.7419	0.6557	→	10111
0.1058	0.5785	0.9706	0.4218	0.0357	→	01100
0.9270	0.0469	0.9572	0.2157	0.0491	→	10100
0.1134	0.4575	0.8854	0.7922	0.1340	→	00110
0.2324	0.9649	0.0003	0.3595	0.6787	→	01001

Αξιολόγηση του αρχικού πληθυσμού

Α/Α	Χρωμόσωμα (Γονότυποι)	Φαινότυπος (δεκαδικός αριθμός ψηφιοσειράς)	$y_i(x)$ i=1…5	$f_i(x)$	Πιθανότητα επιλογής $P_i(x)=f_i(x)/\Sigma f_i(x)$	Αθροιστική Πιθανότητα $q_i=\Sigma P_j$ j=1,..,i
v1	10111	23	1.345	0.743	0.101	0.101
v2	01100	12	0.520	1.923	0.261	0.362
v3	10100	20	1.000	1.000	0.136	0.498
v4	00110	6	0.580	1.732	0.235	0.733
v5	01001	9	0.505	1.980	0.267	1.000
Άθροισμα				7.378	1.000	
Μέσος όρος				1.476	0.20	

Ο δίσκος με τις αθροιστικές πιθανότητες επιλογής

Από τις τιμές της 6ης στήλης, στην οποία εμφανίζεται η πιθανότητα επιλογής του κάθε χρωμοσώματος, μπορεί να σχεδιαστεί η ρουλέτα. Το τόξο του κάθε τομέα είναι ίσο με την πιθανότητα επιλογής. Η αθροιστική πιθανότητα δεν είναι τίποτε άλλο από την τελική τιμή του τόξου έχοντας ως αρχή της μέτρησης το 0.



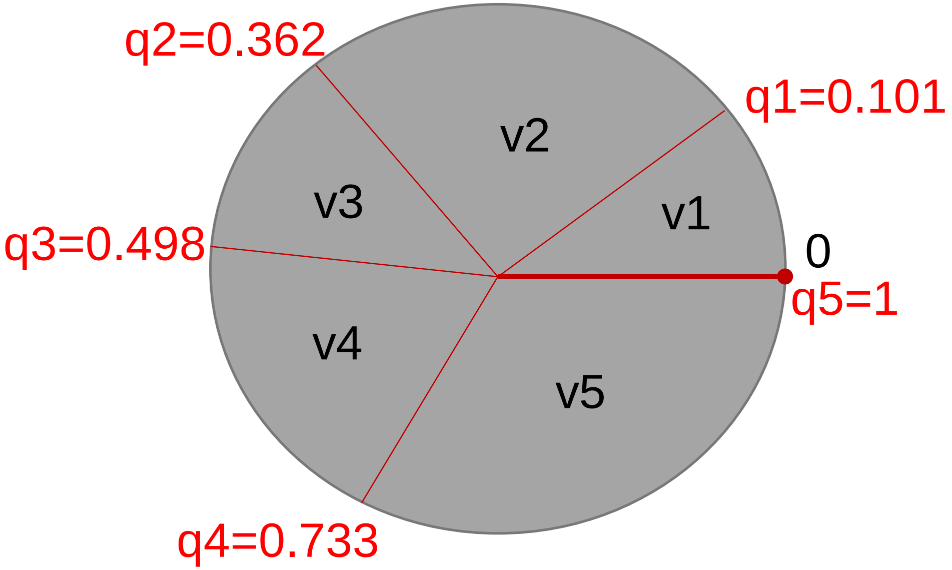
Η μπίλια κάθε φορά όταν ρίχνεται ξεκινά από την αρχή στο 0.

Διαλογή γονέων για αναπαραγωγή

Διαλογή γονέων με ρουλέτα και νέος πληθυσμός

Τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1]	
r1	0.513870
r2	0.175000
r3	0.308652
r4	0.534534
r5	0.947628

Αθροιστική πιθανότητα qi	
q1	0.101
q2	0.362
q3	0.498
q4	0.733
q5	1.000



Συνθήκες επιλογής χρωμοσώματος	Ποιο χρωμόσωμα από τον αρχικό πληθυσμό περνά στο νέο	Νέος πληθυσμός
q3<r1<=q4	v4	v1* = (00110)
q1<r2<=q2	v2	v2* = (01100)
q1<r3<=q2	v2	v3* = (01100)
q3<r4<=q4	v4	v4* = (00110)
q4<r5<=q5	v5	v5* = (01001)

Δημιουργία των απογόνων με διασταύρωση και μετάλλαξη

Διασταύρωση

Τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1]	
r1'	0.822951
r2'	0.151932
r3'	0.625447
r4'	0.314685
r5'	0.346901

Pc=0.8, άρα διασταυρώνονται 5x0.8=4 χρωμοσώματα.
Εάν ri' <0.8 τότε επιλέγονται για διασταύρωση τα χρωμοσώματα: v2*, v3*, v4*, v5*.
Τυχαίο ζευγάρωμα: (v2*, v3*) και (v4*, v5*).
Ψάχνουμε έναν αριθμό στο διάστημα [1,4], αφού έχουμε χρωμόσωμα των 5 bits. Επιλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό 0.82 και τον πολ/ζουμε επί 4 και δίνει 3.28 στη συνέχεια λαμβάνουμε το ακέραιο μέρος του αποτελέσματος, δηλαδή το 3. Θα μπορούσε να επιλεγεί τυχαία ένας ακέραιος αριθμός στο διάστημα [1,3].

Για το πρώτο ζευγάρι έτυχε να γίνει διασταύρωση στο 3ο bit. Επειδή το 2ο και 3ο χρωμόσωμα είναι ίδια και από τη διασταύρωση δεν θα προκύψει κάποιο νέο.

Με όμοια διαδικασία για το δεύτερο ζευγάρι έτυχε να γίνει διασταύρωση στο 2ο bit και προκύπτουν δύο νέα χρωμοσώματα: v4** = (00001), v5** = (01110)

Τρέχον πληθυσμός μετά τη διασταύρωση

Τρέχον πληθυσμός
v1* = (00110)
v2* = (01100)
v3* = (01100)
v4** = (00001)
v5** = (01110)

Μετάλλαξη

Pm = 0.01, διαθέτουμε συνολικά 5x5 = 25 bits, επομένως οι δυνατές μεταλλάξεις σε κάθε κύκλο είναι: 0.01x25 = 0.25. Δημιουργούμε 25 τυχαίους αριθμούς όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Ο τυχαίος αριθμός 0.002 είναι μικρότερος από το Pm=0.01, επομένως στο 3^{o} χρωμόσωμα, το 5^{o} bit μεταλλάσσεται.

v3* = (01100) → (01101)

Αριθμός γονιδίου						5
Αριθμός χρωμοσώματος	1	0.12	0.23	0.05	0.97	0.87
	2	0.02	0.45	0.35	0.07	0.13
	3	0.97	0.15	0.025	0.67	0.002
	4	0.33	0.57	0.045	0.88	0.91
	5	0.26	0.39	0.46	0.78	0.063

Τελικός πληθυσμός μετά τη μετάλλαξη

Τελικός πληθυσμός
v1 = (00110)
v2 = (01100)
v3 = (01101)
v4 = (00001)
v5 = (01110)

Αποτελέσματα

Τελικός πληθυσμός	Φαινότυποι (τιμές του x)	Αντικειμενική συνάρτηση	Συνάρτηση Καταλληλότητας
v1 = (00110)	6	0.58	1.724
v2 = (01100)	12	0.52	1.923
v3 = (01101)	13	0.545	1.835
v4 = (00001)	1	0.905	1.105
v5 = (01110)	14	0.58	1.72
Άθροισμα			8.307

Αξιολόγηση

- Το παράδειγμα του ΓΑ έδωσε καλά αποτελέσματα με μόνο ένα κύκλο.
- Το συνολικό άθροισμα της συνάρτησης καταλληλότητας αυξήθηκε από 7.378 στον αρχικό πληθυσμό στο 8.307 μετά το πέρας του πρώτου κύκλου, μια αύξηση της τάξης του 11%.
- Το μικρό μήκος του χρωμοσώματος και το μικρό μέγεθος του πληθυσμού τόνισαν την αποτελεσματικότητα της διαδικασίας του ΓΑ.

Η έννοια των σχημάτων μέσα από το 1ο παράδειγμα - 1

Στο παραπάνω παράδειγμα παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός δυο άνω του μέσου όρου bit προτύπων των υποσειρών (011**) παράγουν καλά αποτελέσματα, όπου * σημαίνει αδιάφορο. Έτσι εισάγεται η έννοια του **σχήματος (schemata)** στους ΓΑ.

Ένα σχήμα είναι μια ομοιόμορφη φόρμα που περιγράφει ένα υποσύνολο από σειρές με ίδιες συγκεκριμένες θέσεις της σειράς.

Το σχήμα 011** περιγράφει ένα υποσύνολο με τέσσερα μέλη:
01101, 01111, 01110, 01100.

Η έννοια των σχημάτων μέσα από το 1ο παράδειγμα - 2

Δυο μεγέθη χαρακτηρίζουν κάθε σχήμα (Η):

- **Η τάξη του σχήματος** (schema order), σύμβολο o(H), είναι απλά ο αριθμός των κατειλημμένων θέσεων που δεν περιέχουν το *. Η τάξη προσδιορίζει την ειδικότητα, δηλαδή το πόσο συγκεκριμένο είναι το σχήμα.

  Στο παράδειγμά μας έχουμε o(011**) = 3. Το σχήμα 011** αναπαριστά 2^2=4 συμβολοσειρές (διαφάνεια 74). Η έννοια της τάξης σχήματος είναι χρήσιμη στον υπολογισμό της πιθανότητας επιβίωσης του σχήματος κατά τη διαδικασία της μετάλλαξης.

Η έννοια των σχημάτων μέσα από το 1ο παράδειγμα - 3

- **Το μήκος του σχήματος** (schema length), σύμβολο δ(H), είναι η απόσταση μεταξύ της πρώτης και της τελευταίας θέσης της σειράς. Προσδιορίζει την πυκνότητα της πληροφορίας που έχει το σχήμα.
  Στο παράδειγμά μας έχουμε δ(011**) = 3-1=2.
  Η έννοια του μήκους του σχήματος είναι χρήσιμη στον υπολογισμό της πιθανότητας επιβίωσης του σχήματος κατά τη διαδικασία της διασταύρωσης.

Το σχήμα 011 ένα **θεμελιώδες ή δομικό τμήμα** που διαδίδεται από γενιά σε γενιά δίνοντας δείγματα με εκθετική αύξηση. Η δράση αυτής της διαδικασίας ονομάζεται **συνεπαγόμενος παραλληλισμός** (implicit parallelism).

Θεώρημα των Σχημάτων (θεμελιώδες θεώρημα των ΓΑ)

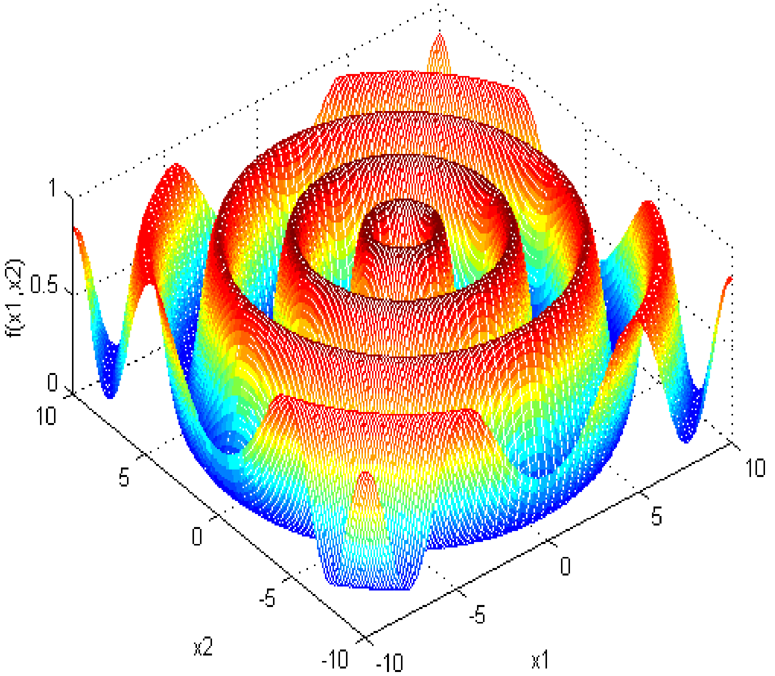
Σχήματα μικρού μήκους, μικρής τάξης και άνω του μέσου όρου σχήματα δημιουργούν εκθετικά αυξανόμενες σειρές σε διαδοχικές γενιές.

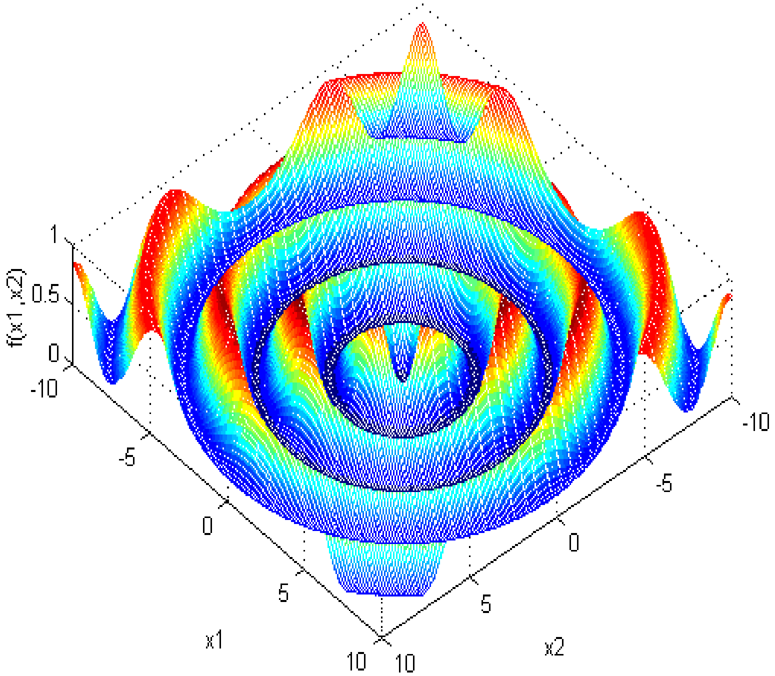
Η υπόθεση των θεμελιωδών τμημάτων

Μικρού μήκους, υψηλής καταλληλότητας σχήματα (θεμελιώδη τμήματα) δειγματοληπτούνται, ανασυνδιάζονται και επανα-δειγμαληπτούνται για να σχηματίσουν σειρές με μεγαλύτερη καταλληλότητα.

Συνάρτηση Schaffer

$$y(x_1,x_2)=0.5+\frac{\sin^2\sqrt{x_1^2+x_2^2}-0.5}{[1.0+0.001(x_1^2+x_2^2)]^2} \qquad -10\le x_i\le 10$$



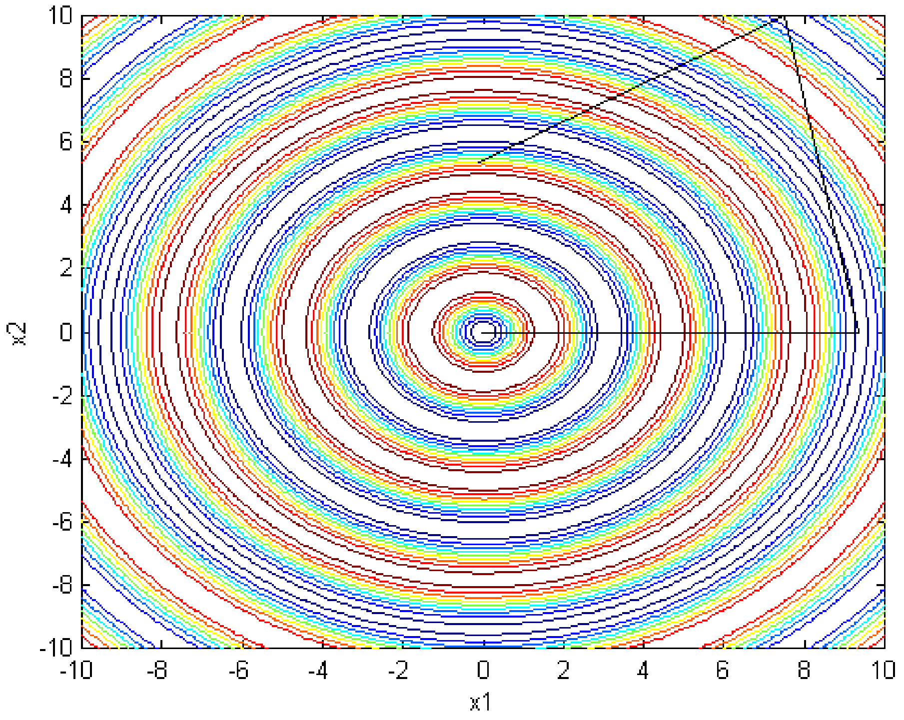


Η συνάρτηση έχει ένα καθολικό ελάχιστο ίσο με 0, στο σημείο $(x_1,x_2)=(0,0)$

Παράμετροι

Μέγεθος πληθυσμού: 100
Αριθμός γενεών: 100
Πιθανότητα διασταύρωσης P_c: 0.7
Πιθανότητα μετάλλαξης P_m: 0.03
Μήκος χρωμοσώματος: 30 (15 bits για x_1 και 15 bits για x_2)
Συνάρτηση καταλληλότητας $f=1/(y(x_1,x_2)+1)$
Με μήκος 15 για κάθε μεταβλητή, έχουμε ακρίβεια
$[10-(-10)]/2^{15}-1 = 0.0006$ για κάθε λύση, δηλαδή μεγαλύτερη από ένα χιλιοστό της μονάδας
Το χρωμόσωμα
u=(000000000000000000000000000000) αντιστοιχεί σε $(x_1,x_2)=(-10,-10)$
ενώ το χρωμόσωμα
u=(111111111111111111111111111111) αντιστοιχεί σε $(x_1,x_2)=(10,10)$

Αποτελέσματα



Διάγραμμα ισοϋψών και πορεία αναζήτησης

$\mathbf{x_1 = -\ 0.000305,\ x_2 = -\ 0.000305,\ y(x_1,x_2)=0}$

Ασκήσεις

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης y(x) στο διάστημα (0,16].

$$y(x) = \left(4\sqrt{x} - x\right)^4$$

α) Με τον κλασσικό μαθηματικό τρόπο.
β) Να βρεθεί το μέγιστο εφαρμόζοντας το ΓΑ και για μία γενιά.
γ) Να βρεθεί το ελάχιστο εφαρμόζοντας το ΓΑ και για μία γενιά.

Παράμετροι ΓΑ: Ακρίβεια ακέραιου αριθμού, πιθανότητα διασταύρωσης 0.7, πιθανότητα μετάλλαξης 0.001, μέγεθος πληθυσμού 6.

Ακρότατα: Στο x=4 υπάρχει ένα μέγιστο y(4)=256. Στο x=16 υπάρχει ένα ελάχιστο y(16)=0.

2. Δημιουργήστε ένα δυαδικό διάνυσμα για να αναπαραστήσετε την πραγματική τιμή της μεταβλητής $x \in [-1, 2]$.
Η ακρίβεια της παράστασης να γίνει με έξι δεκαδικά ψηφία.

3. Δημιουργήστε ένα δυαδικό διάνυσμα που να αναπαριστά τις τιμές δυο πραγματικών μεταβλητών:

$$x_1 \text{ και } x_2 \text{ όπου } x_1 \in [-3, 12.1] \text{ και } x_2 \in [4.1, 5.8]$$

Η ακρίβεια της παράστασης να έχει 4 δεκαδικά στοιχεία.

4. Να δειχθεί πώς εφαρμόζεται ο ΓΑ για μια γενιά στο εξής πρόβλημα: Μήκος αλυσίδας:8, Συνάρτηση καταλληλότητας: *y(x)*=πλήθος «1» στην αλυσίδα, Μέγεθος πληθυσμού:4, Ρυθμός διασταύρωσης:0.7 και Ρυθμός μετάλλαξης:0.001

5. Το 1ο λυμένο παράδειγμα να επιλυθεί με:

$$P_c : 0, 0.5, 0.9$$

$$P_m : 0, 0.01, 0.1$$

Τι παρατηρείτε ως προς την απόδοση του ΓΑ.

6. Το 1ο λυμένο παράδειγμα να επιλυθεί χρησιμοποιώντας gray code για την αναπαράσταση.

7. Το 1ο λυμένο παράδειγμα να επιλυθεί κάνοντας αλλαγή στον αρχικό πληθυσμό.

8. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης με μαθηματικό λογισμό και ΓΑ.

$$y(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \text{ όπου } x \in [-10, 10]$$

9. Δίνεται η συνάρτηση: integer(8x)/8 όπου x παίρνει τιμές στο διάστημα [0,1]. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης με ΓΑ. Μπορεί να βελτιστοποιηθεί με κλασικές τεχνικές;

10. Στο 1ο λυμένο παράδειγμα να γίνει και ο δεύτερος κύκλος της εξέλιξης χρησιμοποιώντας τα δεδομένα που προέκυψαν από τον 1ο κύκλο. Υπάρχει σημαντική βελτίωση ή χειροτέρευση της καταλληλότητας των χρωμοσωμάτων; Εάν είναι ναι εξηγείστε, εάν είναι όχι πάλι εξηγείστε;

11. Μια εναλλακτική συνάρτηση καταλληλότητας για το 1ο λυμένο παράδειγμα είναι:

$$f(x) = 1 - \frac{y(x)}{2.71}$$

Το 2.71 είναι η τιμή της *y(x)* όταν *x*=31, η μεγαλύτερη του *x* για ένα δυαδικό αριθμό με 5 bits. Εφαρμόστε τον ΓΑ για ένα κύκλο και αξιολογείστε τα νέα αποτελέσματα σχετικά με το 1ο παράδειγμα.

12. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις:

$$f(x) = 1 - \frac{y(x)}{2.71}, \quad f(x) = \frac{1}{y(x)}$$

Με βάση τα αποτελέσματα από την άσκηση 11, ποια από τις δυο είναι η καταλληλότερη για να χρησιμοποιηθεί ως συνάρτηση καταλληλότητας στο 1^{ο} λυμένο παράδειγμα.

13. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης *y(x)* στο διάστημα (0,20].

$$y(x) = \left(4\sqrt{x} - x\right)^2$$

α) Με τον κλασσικό μαθηματικό τρόπο.
β) Να βρεθεί το μέγιστο εφαρμόζοντας το ΓΑ και για μία γενιά.
γ) Να βρεθεί το ελάχιστο εφαρμόζοντας το ΓΑ και για μία γενιά.

Παράμετροι ΓΑ: Ακρίβεια ακέραιου αριθμού, πιθανότητα διασταύρωσης 0.7, πιθανότητα μετάλλαξης 0.001, μέγεθος πληθυσμού 6.

Ακρότατα: Στο x=4 υπάρχει ένα μέγιστο y(4)=256. Στο x=16 υπάρχει ένα ελάχιστο y(16)=0.

2^o Παράδειγμα βελτιστοποίησης συνάρτησης με ΓΑ

Βελτιστοποίηση της αντικειμενικής συνάρτησης

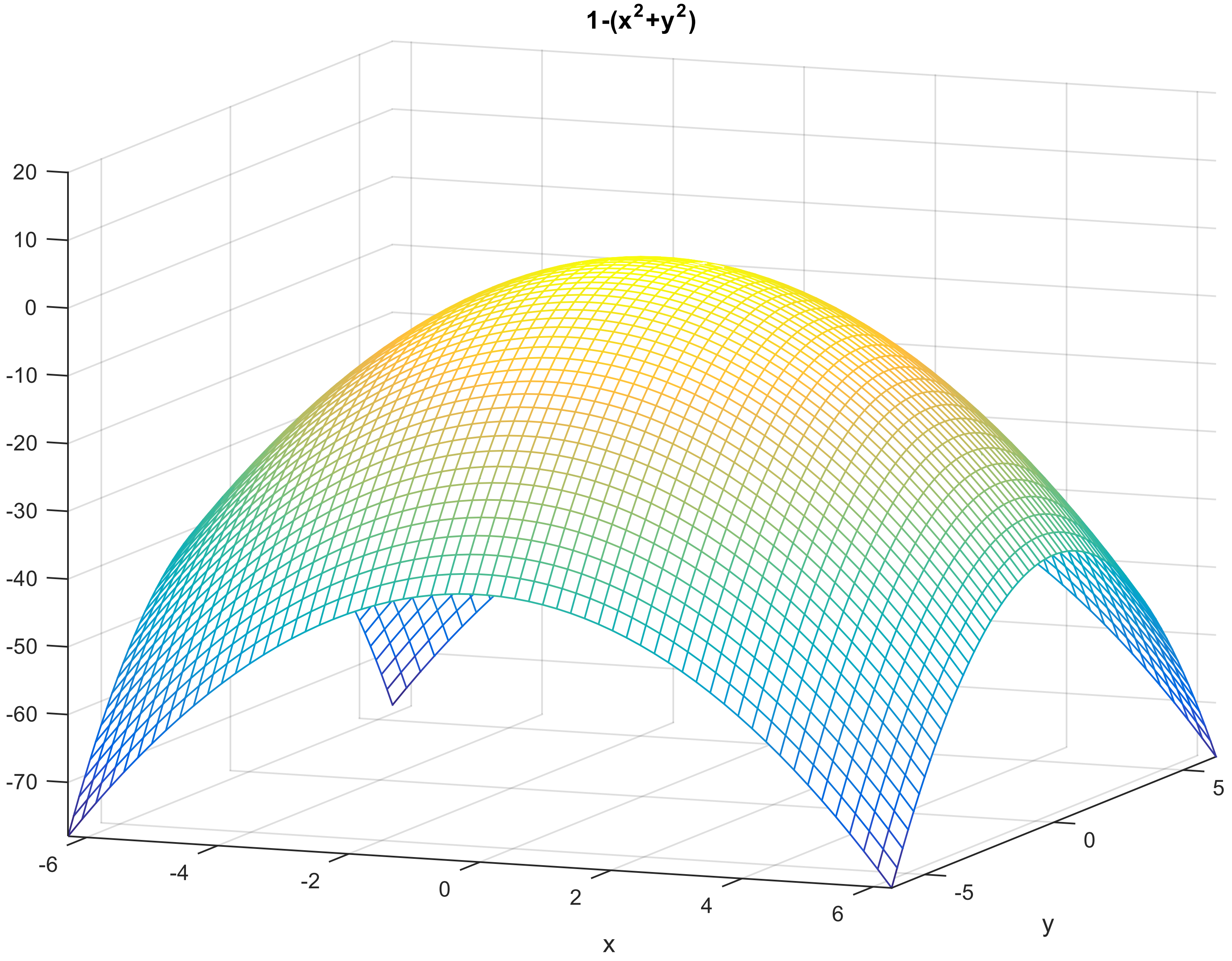
$$z(x,y) = 1 - \left(x^2 + y^2\right)$$

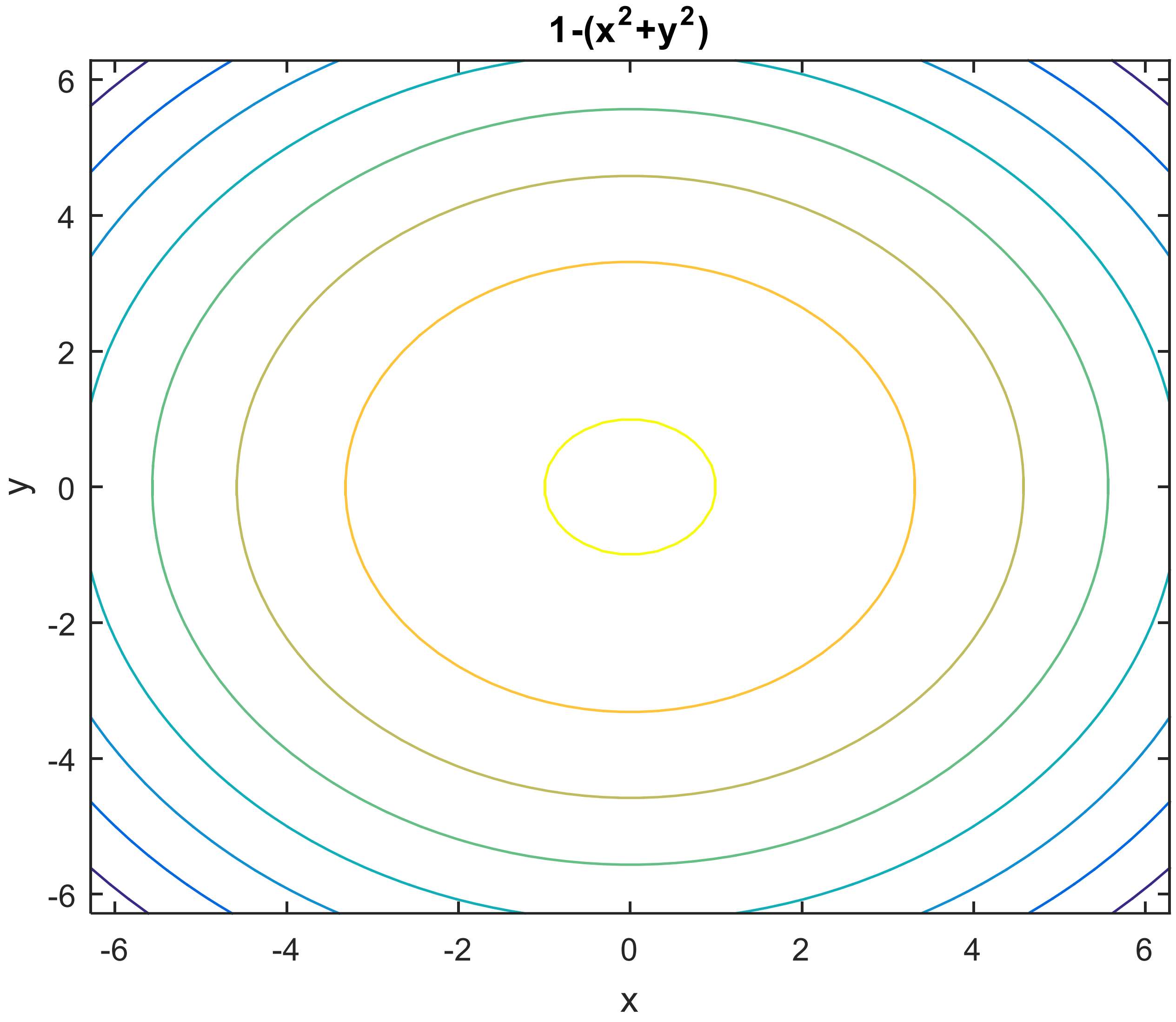
Να βρεθεί η λύση (x,y) για την οποία η συνάρτηση z να μεγιστοποιηθεί.
Οι μεταβλητές είναι ακέραιοι αριθμοί με $0 \le x, y \le 7$

Λύση

Μήκος ψηφιοσειράς για κάθε μεταβλητή: 3 bits
Η ψηφιοσειρά (000 000) απεικονίζει τη λύση (0,0)
Η ψηφιοσειρά (111 111) απεικονίζει τη λύση (7,7)
Ο δυαδικός αριθμός 110 στο διάστημα [0,7] αντιστοιχεί στον αριθμό 6.

$$x = L + x' \cdot R_i \rightarrow x = 0 + \text{δεκαδικός } (110)_2 \cdot \frac{7-0}{2^3-1} = 6$$


1-(x2+y2)
20
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-6
-4
-2
0
2
4
6
x
5
0
-5
y



$1-(x^2+y^2)$
6
4
2
0
-2
-4
-6
y
-6
-4
-2
0
2
4
6
x

Επιλογή της συνάρτηση καταλληλότητας

Επειδή η αντικειμενική συνάρτηση λαμβάνει και αρνητικές τιμές η συνάρτηση καταλληλότητας ορίζεται ως

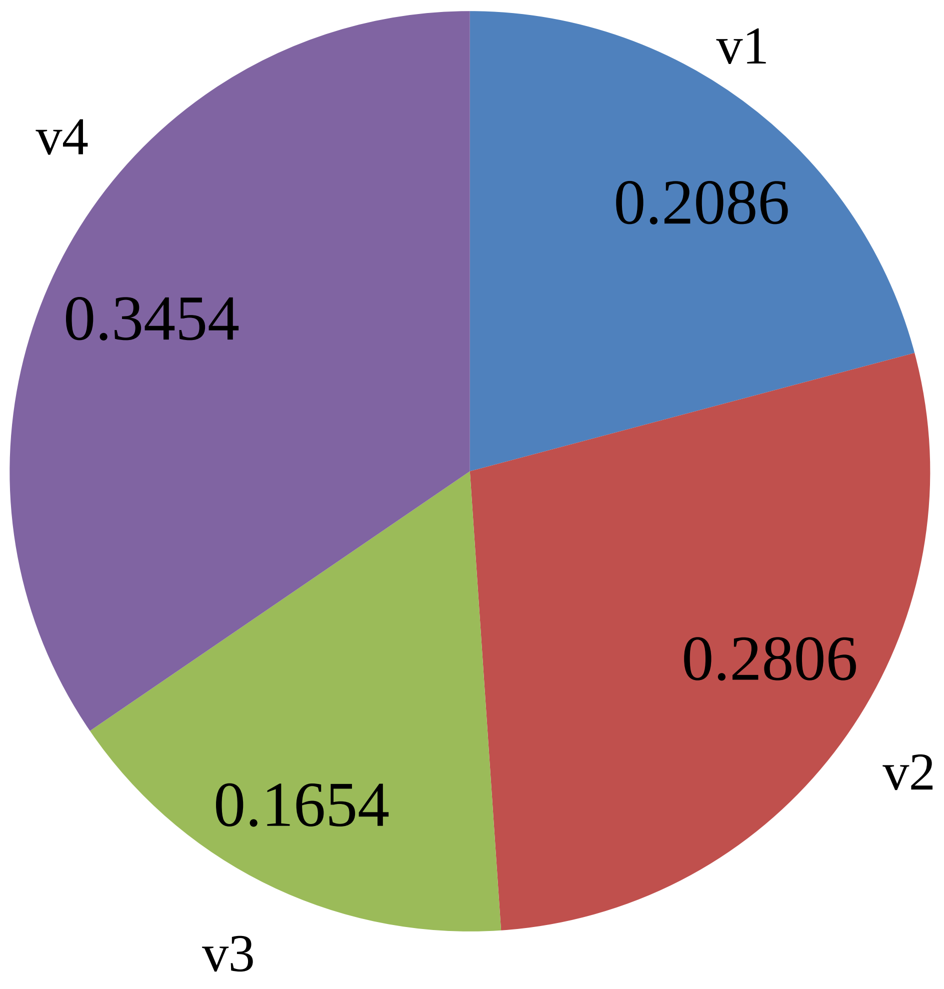
$$f(x,y) = z(x,y) - \min[z(x,y)]$$

$$f(x,y) = z(x,y) - (-97)$$

$$f(x,y) = 1 - (x\char`^2+y\char`^2) + 97$$

A/A	Χρωμόσωμα	Φαινότυπος x1,x2	Τιμή καταλληλότητας fi(x,y) i=1,…,4	Πιθανότητα επιλογής Pi=fi(x,y)/Σfi(x,y)	Αθροιστική Πιθανότητα qi=ΣPj j=1,..,i
v1	010110	(2,6)	58	0.2086	0.2086
v2	100010	(4,2)	78	0.2806	0.4892
v3	110100	(6,4)	46	0.1654	0.6546
v4	001001	(1,1)	96	0.3454	1
Άθροισμα			278	1.0000	
Μέσος όρος			69.5	0.25	

Από τις τιμές της 5ης στήλης, στην οποία εμφανίζεται η πιθανότητα επιλογής του κάθε χρωμοσώματος, μπορεί να σχεδιαστεί η ρουλέτα.


v1
0.2086
v4
0.3454
0.2806
v2
0.1654
v3

Διαλογή γονέων με ρουλέτα και νέος πληθυσμός

Τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1]	
r1	0.513870
r2	0.175000
r3	0.308652
r4	0.836534

Αθροιστική πιθανότητα q_i	
q1	0.2086
q2	0.4892
q3	0.6546
q4	1

Συνθήκες επιλογής χρωμοσώματος	Ποιο χρωμόσωμα από τον αρχικό πληθυσμό περνά στο νέο	Νέος πληθυσμός
q1<r1<=q3	v3	v1* = (110100)
r2<=q1	v1	v2* = (010110)
q1<r3<=q2	v2	v3* = (100010)
q3<r4<=q4	v4	v4* = (001001)

Διασταύρωση

Τυχαίοι αριθμοί στο διάστημα [0,1]	
r1'	0.822951
r2'	0.151932
r3'	0.625447
r4'	0.314685

Pc=0.5, άρα διασταυρώνονται 4x0.5=2 χρωμοσώματα.
Εάν ri' < 0.5 τότε επιλέγονται για διασταύρωση τα χρωμοσώματα: v2*, v4*.
Επιλέγουμε έναν τυχαίο αριθμό, τον 0,75, και τον πολλαπλασιάζουμε επί 3 και προκύπτει ο 2,25, το ακέραιο μέρος του οποίου είναι το 2.

Για το επιλεγέν ζευγάρι έτυχε να γίνει διασταύρωση στο 2ο bit οπότε προκύπτουν δύο νέα χρωμοσώματα:
v2** = (011001), v4** = (000110)

Τρέχον πληθυσμός μετά τη διασταύρωση
v1* = (110100)
v2** = (011001)
v3* = (100010)
v4** = (000110)

Μετάλλαξη

Pm = 0.01, διαθέτουμε συνολικά 6x4 = 24 bits, επομένως οι δυνατές μεταλλάξεις σε κάθε κύκλο είναι: 0.01x24 = 0.24.

Δημιουργούμε 16 τυχαίους αριθμούς όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα. Ο τυχαίος αριθμός 0.003 είναι μικρότερος από το Pm=0.01, επομένως στο $3^{ο}$ χρωμόσωμα, το $1^{ο}$ bit μεταλλάσσεται.

v3* = (100010) → (000010)

Αριθμός γονιδίου		1				
Αριθμός χρωμοσώματος	1	0.23	0.05	0.97	0.87	0.35
	2	0.45	0.35	0.07	0.13	0.12
	3	0.003	0.025	0.67	0.03	0.90
	4	0.57	0.045	0.88	0.91	0.07

Τελικός πληθυσμός
v1* = (100010)
v2** = (011001)
v3* = (000010)
v4** = (000110)

Αποτελέσματα

Τελικός πληθυσμός	Φαινότυποι	Αντικειμενική συνάρτηση	Συνάρτηση καταλληλότητας
v1 = (100010)	(4,2)	-19	78
v2 = (011001)	(3,1)	-9	88
v3 = (000010)	(0,2)	-3	94
v4 = (000110)	(0,6)	-35	62
Άθροισμα			322

Το 3ο χρωμόσωμα δίνει την πλησιέστερη τιμή (-3) στην μέγιστη (1) της z(x,y). Στην πρώτη γενιά η συνολική καταλληλότητα αυξήθηκε από 278 σε 322 κατά 15.8%.

Βελτιστοποίηση με περιορισμούς

Το πρόβλημα:

$\min y(\bar{x}) \quad \bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \in F \subseteq S \subseteq R^n$: Το αντικείμενο ελαχιστοποίησης

υπόκειται στους περιορισμούς

$g_j(\bar{x}) \leq 0,\ j = 1, \ldots, m_1$: Ανισοτικοί περιορισμοί

$h_k(\bar{x}) = 0, k = 1, \ldots, m_2$: Ισοτικοί περιορισμοί

F είναι η περιοχή των εφικτών λύσεων και S είναι ο συνολικός χώρος αναζήτησης. Η συνάρτηση y είναι η αντικειμενική συνάρτηση. Η συνάρτηση y και οι περιορισμοί μπορεί να είναι γραμμικοί ή μη γραμμικοί. Το πρόβλημα του μη γραμμικού προγραμματισμού είναι να βρεθεί ένα σημείο

$$\bar{x}^* \in F \text{ τέτοιο ώστε } y(\bar{x}^*) \leq y(\bar{x}),\ \forall \bar{x} \in F$$

Minimize y (x)
s.t. g(x) = 0
h(x) <=0.

This is an optimization format where the objective function is described as y (x) here and g(x) represents all the equality constraints of the variable x. h(x) means the inequality constraints. The word “s.t.” is the abbreviation of the phrase “subject to”. As summarized in Equation, we make the problems by minimizing the value of y(x) when the equality constraints g(x) and inequality constraints h(x) are satisfied and x is the optimization variable. The objective function y(x) generally focuses on the losses or total costs.

Μετασχηματισμός του προβλήματος με περιορισμούς σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς

Η πλέον γνωστή μέθοδος στους ΓΑ για να αντιμετωπίσει τους περιορισμούς είναι η χρησιμοποίηση συναρτήσεων πέναλτι.

Η μέθοδος των πέναλτι μετασχηματίζει το πρόβλημα με περιορισμούς σε πρόβλημα χωρίς περιορισμούς με δύο τρόπους, στον έναν ο όρος της ποινής είναι προσθετικός ενώ στον άλλον τρόπο η ποινή είναι πολλαπλασιαστική.

Στο μέθοδο του προσθετικού πέναλτι έχει δοθεί μεγαλύτερη προσοχή από την επιστημονική κοινότητα και αυτό θα περιγράψουμε εδώ.

Προσθετική συνάρτηση ποινής

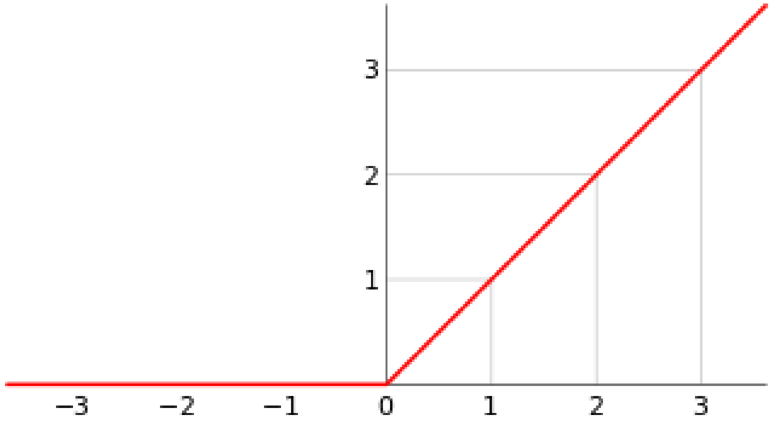
$$\varphi(\bar{x},\rho) = y(\bar{x}) \pm \rho \cdot Pen(\bar{x})$$

$$Pen(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{m_1} \left(\max[g(\bar{x}),0] \right)^2 + \sum_{k=1}^{m_2} h_k^2(\bar{x})$$

όπου φ είναι η νέα αντικειμενική συνάρτηση προς βελτιστοποίηση, ρ η παράμετρος του πέναλτι, που καθορίζει το μέγεθος της ποινής και *Pen* η συνάρτηση ποινής. Εάν όλοι οι περιορισμοί ικανοποιούνται τότε η συνάρτηση *Pen* είναι μηδενική.

+: ελαχιστοποίηση

-: μεγιστοποίηση

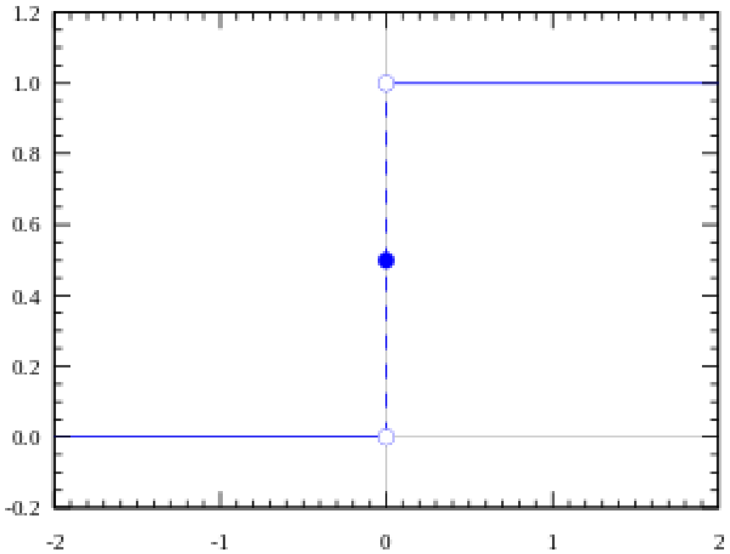


Η συνάρτηση ramp function ορίζεται ως

$$R(x) := \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση ramp function επίσης ορίζεται με τη συνάρτηση max:

$$R(x) := \max(x, 0)$$



Ο απλούστερος ορισμός της συνάρτησης Heaviside είναι η παράγωγος της συνάρτησης αναρρίχησης ramp function:

$$H(x) := \frac{d}{dx} \max\{x, 0\}$$

Παράδειγμα 1 με ένα ανισοτικό περιορισμό

$$\min y(x) = x^2 - 10x$$

περιορισμός

$$g(x) = x - 3 \leq 0$$

Στο μετασχηματισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης η νέα αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\varphi(x,\rho) = x^2 - 10x + \rho \cdot \left(\max[0,(x-3)]\right)^2$$

Παράδειγμα 2 με ένα ισοτικό περιορισμό

$$\min y(x) = x^2$$

περιορισμός

$$h(x) = x - 1 = 0$$

Στο μετασχηματισμένο πρόβλημα βελτιστοποίησης η νέα αντικειμενική συνάρτηση είναι:

$$\varphi(x,\rho) = x^2 + \rho(x-1)^2$$

Παράδειγμα 3 με δύο ανισοτικούς περιορισμούς

Η τιμή της μεταβλητής x να ελαχιστοποιεί την αντικειμενική συνάρτηση y(x) και να υπόκεινται στον περιορισμό:

$$x_{ref} - \Delta\mathrm{x} \le x \le x_{ref} + \Delta\mathrm{x}$$

όπου Δx μια αποδεκτή μεταβολή της μεταβλητής x.

Διατύπωση του προβλήματος με τους περιορισμούς

$$\min y(x)$$
$$g_1(x) = x - \left(x_{ref} + \Delta\mathrm{x}\right) \le 0$$
$$g_2(x) = -x + \left(x_{ref} - \Delta\mathrm{x}\right) \le 0$$

Νέα αντικειμενική συνάρτηση και διατύπωση του προβλήματος χωρίς περιορισμούς

$$\varphi(x,\rho) = y(x) + \rho \cdot \left[\left(max(g_1,0)\right)^2 + \left(max(g_2,0)\right)^2\right]$$

NP (Non-deterministic Polynomial) - πρόβλημα

Τα NP-προβλήματα είναι προβλήματα για τα οποία δεν υπάρχουν γνωστοί αλγόριθμοι που θα μπορούσαν να εγγυηθούν τη λύση του προβλήματος σε πολυωνυμικό χρόνο. Όμως είναι δυνατόν να «εικάσουμε/μαντεύσουμε» μια λύση και να την επιβεβαιώσουμε σε πολυωνυμικό χρόνο.

Μερικά από τα πολύ γνωστά NP προβλήματα είναι:

- 0/1 knapsack,
- του περιοδεύοντος πωλητή,

...

The 0/1 KP πρόβλημα είναι παράδειγμα συνδυαστικού προβλήματος βελτιστοποίησης, το οποίο επιδιώκει να μεγιστοποιήσει την αξία των αντικειμένων χωρίς να ξεπερνιέται η χωρητικότητά του σάκου.

Διατύπωση του 0/1 KP προβλήματος

Έχουμε ένα σάκο χωρητικότητας C μονάδων βάρους/όγκων και n αντικείμενα με διαφορετικά βάρη/όγκους W/V και αξίες P.
Η διαδικασία είναι για ένα σύνολο βαρών W(i), αξιών P(i) και χωρητικότητας C, να βρούμε ένα δυαδικό διάνυσμα **x**=[x(1),x(2),…,x(n)] τέτοιο ώστε να ικανοποιείται

ο περιορισμός: $g(x,W)=\sum_{i=1}^{n} x(i)\cdot W(i)-C\leq 0$

Για τον οποίον $P(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n} x(i)\cdot P(i)\rightarrow \max$

Το 0/1 σημαίνει ότι δεν μπορούμε να έχουμε περισσότερα από ένα ίδια αντικείμενα στο σάκο.
Εάν δεν ικανοποιείται ο περιορισμός τότε η αντικειμενική συνάρτηση $P(\mathbf{x})$ υπόκειται σε ποινή.

Πως διαμορφώνεται η αντικειμενική συνάρτηση με ποινή;

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x(i) \cdot P(i) - Pen(\mathbf{x})$$

Η συνάρτηση ποινής είναι: $Pen(\vec{x}) = max[o, g(\vec{x})]$

$$g(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x(i) \cdot W(i) - C$$

Διαφορετικά η φ: $\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x(i) \cdot P(i) - \rho \cdot \max\left[0, g\right]$

όπου $\rho = \max_{i=1,\dots,n} \left\{ \frac{P(i)}{W(i)} \right\}$

Ένα 0/1 KP πρόβλημα που λύνεται με το χέρι

Αντικείμενο	1	2	3
Βάρος W(i)	6	7	8
Αξία P(i)	4	3	5

Ψάχνουμε να μεγιστοποιήσουμε τη συνολική αξία των αντικειμένων στο σάκο:

$$P(1)\cdot x(1)+P(2)\cdot x(2)+P(3)\cdot x(3)\rightarrow \max$$

Με τον περιορισμό: $W(1)\cdot x(1)+W(2)\cdot x(2)+W(3)\cdot x(3) < 14$

$$x(i)\in\{0,1\},\quad \text{για } i=1,2,3$$

Για αυτό το πρόβλημα υπάρχουν 2^3 = 8 πιθανές λύσεις

1	**2**	**3**	**Συνολικό βάρος**	**Συνολική αξία**
0	0	0	0	0
0	0	1	8	5
0	1	0	7	3
0	1	1	15	-
1	0	0	6	4
1	0	1	14	-
1	1	0	13	7
1	1	1	21	-

Τιμωρία

Το πρόβλημα του σάκου 0/1 Knapsack (σακίδιο)

Έστω ότι διαθέτουμε ένα σάκο χωρητικότητας C=20 μονάδων βάρους και οκτώ αντικείμενα με βάρη και αξίες όπως δείχνονται στον επόμενο πίνακα.

Αντικείμενο	1	2	3	4	5	6	7	8
Βάρος W(i)	5	4	7	6	3	7	9	3
Αξία P(i)	7	11	14	6	9	10	8	4

Σχεδιάστε ένα ΓΑ για να επιλέξετε τα αντικείμενα που θα βάλετε στο σάκο με τους περιορισμούς:

1. Το συνολικό βάρος των αντικειμένων να μην υπερβαίνει τη μέγιστη χωρητικότητα του σάκου (C = 20) και
2. Η αξία των αντικειμένων να είναι η μέγιστη.

Λύση

Χρησιμοποιούμε δυαδικά χρωμοσώματα οκτώ θέσεων, αφού διαθέτουμε οκτώ αντικείμενα. Το ‘1’ δηλώνει την επιλογή του αντίστοιχου αντικειμένου ενώ το ‘0’ τη μη επιλογή του.

Τι εννοούμε με την παραπάνω κωδικοποίηση του προβλήματος;

Ένα παράδειγμα

Χρωμόσωμα **x**=(11001101):

- Σημαίνει ότι ρίχνουμε στο σακίδιο πέντε αντικείμενα x(1), x(2), x(5),x(6) και x(8).
- Το συνολικό βάρος τους είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και W:
  Wολ=**x**·**W**=W(1)+ W(2)+ W(5)+ W(6)+ W(8)=5+4+3+7+3=22.
- Η συνολική αξία των αντικειμένων είναι το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων x και P:
  Pολ=**x**·**P**=P(1)+P(2)+P(5)+P(6)+P(8)=7+11+9+10+4=41.

Ο περιορισμός της χωρητικότητας δεν ικανοποιείται διότι Wολ = 22 > C = 20.

Όσον αφορά τη συνολική αξία των αντικειμένων Pολ = 41 δεν γνωρίζουμε εάν είναι η μέγιστη.

Επομένως το συγκεκριμένο χρωμόσωμα δεν είναι μια εφικτή λύση του προβλήματος. Η λύση αυτή λοιπόν τιμωρείται με αρνητική βαθμολογία όσον αφορά την αξία της.

Το προηγούμενο χρωμόσωμα που εξέφραζε μια μη εφικτή λύση τιμωρείται με αρνητική βαθμολογία και η αξιολόγησή του τώρα είναι:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} x(i) \cdot P(i) - Pen(\mathbf{x}) = 41 - 3 \cdot (22 - 20) = 35$$

Τελικά στο δοθέν χρωμόσωμα τα αντικείμενα έχουν συνολικό βάρος 22 μονάδες και συνολική τους αξία με τιμωρία είναι 35.

Προσομοιώστε την εκτέλεση του ΓΑ για μια γενιά, χρησιμοποιώντας τους παρακάτω τυχαίους αριθμούς.

0,845906	**0,699906**	**0,804964**	**0,24837**	**0,953562**	**0,182875**	**0,718099**	**0,500637**	**0,260707**	**0,51551**
0,053112	0,176151	0,201165	0,051985	0,911086	0,848564	0,797826	0,02498	0,982153	0,773314
0,111153	0,425937	0,799184	0,003772	0,511986	0,039528	0,0949	0,753538	0,383606	0,282382
0,533785	0,26562	0,625642	0,168813	0,32458	0,802747	0,228018	0,430107	0,805005	0,792106
0,322577	0,833281	0,047505	0,402989	0,095117	0,208419	0,880189	0,63158	0,212821	0,695394
0,666313	0,036825	0,491645	0,759548	0,015177	0,745192	0,370872	0,694574	0,949447	0,410079
0,157394	0,683835	0,021218	0,809754	0,430536	0,986256	0,661978	0,748426	0,04401	0,52991
0,257874	0,879656	0,452001	0,850174	0,587847	0,544318	0,951598	0,269536	0,692583	0,168351
0,487436	0,828461	0,191923	0,68631	0,561896	0,090307	0,024886	0,011928	0,355429	0,78068
0,376034	0,857876	0,898942	0,465213	0,001193	0,816935	0,114765	0,135921	0,443778	0,915991

Δημιουργία αρχικών χρωμοσωμάτων

4 τυχαίοι αριθμοί για τη διαδικασία της αναπαραγωγής

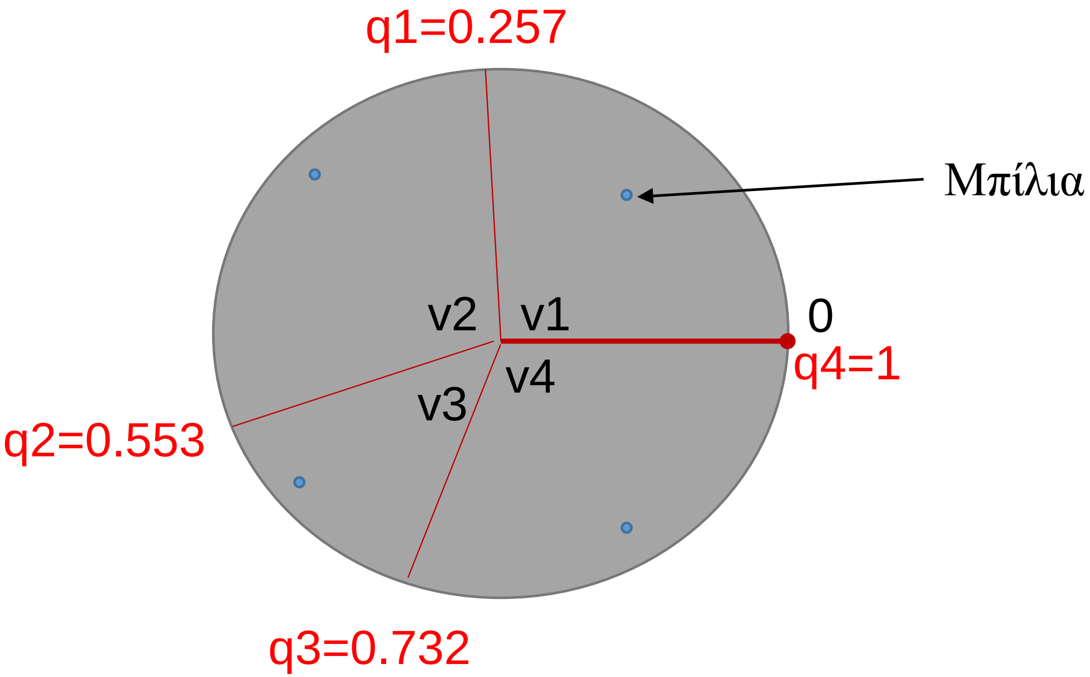
4 τυχαίοι αριθμοί για τη διαδικασία του ζευγαρώματος

32 τυχαίοι αριθμοί για τη διαδικασία της μετάλαξης

1 τυχαίος αριθμός για την επιλογή του σημείου της διασταύρωσης

Συνέχεια της λύσης του προβλήματος του σάκου

Α/Α	Χρωμόσωμα	Βάρος	Αξία χωρίς τιμωρία	Αξία με τιμωρία	Πιθανότητα επιλογής Pi=Αξία_i/ΣΑξία_i	Αθροιστική Πιθανότητα qi=ΣPj j=1,..,i
v1	11101011	31	53	20	0.257	0.257
v2	01000011	16	23	23	0.296	0.553
v3	10110010	27	35	14	0.179	0.732
v4	10010010	20	21	21	0.268	1
Άθροισμα				78	1.000	
Μέσος όρος				19.	0.25	



0.625642	**0.168813**	**0.32458**	**0.802747**

Νέος πληθυσμός
v1* = 11101011
v2* = 01000011
v3* = 10110010
v4* = 10010010

Διασταύρωση

0.228018	**0.430107**	**0.805005**	**0.792106**

Pc=0.8. Εάν ri' < 0.8 τότε επιλέγονται για διασταύρωση τα χρωμοσώματα: v1*, v2*, v4*.

Επειδή ο αριθμός των χρωμοσωμάτων είναι περιττός τότε ή μετακινούμε ένα χρωμόσωμα ή προσθέτουμε ένα άλλο τυχαία. Στο παράδειγμά μας αφαιρούμε το πρώτο χρωμόσωμα.

Το ζευγάρωμα: (v2*, v4*).

Πολλαπλασιάζουμε τον επόμενο τυχαίο αριθμό επί 7 και παίρνουμε το ακέραιο μέρος ως θέση διασταύρωσης. 0,322577 x 7 = 2,258039, που σημαίνει ότι η διασταύρωση θα γίνει στο 2^{ο} bit.

Οπότε προκύπτουν δύο νέα χρωμοσώματα:

v2** = (01010010), v4** = (10000011)

Ο τρέχον πληθυσμός μετά τη διασταύρωση
v1* = 11101011
v2** = 01010010
v3* = 10110010
v4** = 10000011

Μετάλλαξη

	0,833281	**0,047505**	**0,402989**	**0,095117**	**0,208419**	**0,880189**	**0,63158**	**0,212821**	**0,695394**
0,666313	0,036825	0,491645	0,759548	0,745192	**0,015177**	0,370872	0,694574	0,949447	0,410079
0,157394	0,683835	0,021218	0,809754	0,430536	0,986256	0,661978	0,748426	0,04401	0,52991
0,257874	0,879656	0,452001							

Pm = 0.02, διαθέτουμε συνολικά 8x4 = 32 bits, επομένως οι δυνατές μεταλλάξεις σε κάθε κύκλο είναι: 0.02x32 = 0.64.

Από τους 32 τυχαίους αριθμούς του πίνακα. Ο τυχαίος αριθμός **0,015177** είναι μικρότερος από το Pm=0.02, είναι ο 15^{ος} και αντιστοιχεί στο 2^{ο} χρωμόσωμα στο 7^{ο} bit. Άρα το 7^{ο} bit μεταλλάσσεται.

v2** = 01010010 → 01010000

Ο τελικός πληθυσμός μετά την πρώτη γενιά
v1 = 11101011
v2 = 01010000
v3 = 10110010
v4 = 10000011

Αξιολόγηση

	Α/Α	Χρωμόσωμα	Βάρος	Αξία χωρίς τιμωρία	Αξία με τιμωρία	
Τιμωρία	~~v1~~	~~11101011~~	~~31~~	~~53~~	~~20~~	Μη εφικτή λύση
Εφικτή λύση	v2	01010000	10	17	17	
Τιμωρία	~~v3~~	~~10110010~~	~~27~~	~~35~~	~~14~~	Μη εφικτή λύση
Βέλτιστη λύση	**v4**	**10000011**	**17**	**19**	**19**	
	Άθροισμα				70	
	Μέσος όρος				17,5	

Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι ο πληθυσμός να συγκλίνει ή να συμπληρωθεί ένας προκαθορισμένος αριθμός επαναλήψεων.